DIE GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN IN EINZELDARSTELLUNGEN

BAND I

W. BLASCHKE

VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIALGEOMETRIE I

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

LIBRARY OF
WELLESLEY COLLEGE

PRESENTED BY

Mabel M. Young

Mabel M. Young
1923.

DIE GRUNDLEHREN DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE
HAMBURG

M. BORN
GÖTTINGEN

C. RUNGE
GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT
GÖTTINGEN

BAND I

VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIALGEOMETRIE I

VON

WILHELM BLASCHKE

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

VORLESUNGEN ÜBER

DIFFERENTIAL-GEOMETRIE

UND GEOMETRISCHE GRUNDLAGEN VON EINSTEINS RELATIVITÄTSTHEORIE

VON

WILHELM BLASCHKE

ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT HAMBURG

I

ELEMENTARE DIFFERENTIAL-GEOMETRIE

MIT 38 TEXTFIGUREN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

192058

ALLE RECHTE, INSBESONDERE
DAS DER ÜBERSETZUNG IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.
COPYRIGHT 1921 BY JULIUS SPRINGER IN BERLIN

Gift of Miss Mabel Young

MATH
QA
641
B6
1

DRUCK VON OSCAR BRANDSTETTER IN LEIPZIG

MEINEM VEREHRTEN LEHRER

E. STUDY

ZUM SECHZIGSTEN GEBURTSTAG

Vorwort.

Dieses Lehrbuch soll drei Bändchen umfassen. Das erste bringt eine knappe Darstellung der „elementaren", das heißt bewegungsinvarianten, das zweite die affine Differentialgeometrie. Das dritte soll den Maßbestimmungen von *Riemann* und *Weyl* gewidmet sein, die aufs innigste mit *Einsteins* Theorie der Schwere zusammenhängen.

Die Differentialgeometrie untersucht die Eigenschaften der krummen Linien und Flächen im unendlich Kleinen. Die verschiedenen Wendungen des Begriffs „Krümmung" stehen dabei im Vordergrund, so daß man auch von „Krümmungstheorie" spricht. Im Gegensatz dazu betrachtet man in der algebraischen Geometrie die geometrischen Gebilde von vornherein in ihrer Gesamterstreckung. Indessen verzichtet auch die Differentialgeometrie durchaus nicht auf das Studium der geometrischen Figuren im ganzen und die Fragen der „Differentialgeometrie im großen", die die mikroskopischen mit den makroskopischen Eigenschaften verknüpfen, gehören zu den reizvollsten, allerdings auch zu den schwierigsten Fragen unsrer Wissenschaft.

Die Krümmungstheorie erscheint, wenn man erst die Fesseln der Dimensionenzahl Drei und der Maßbestimmung *Euklids* zerrissen hat, von hohem Standpunkt aus gesehen, nicht mehr bloß als ein eng begrenztes Teilgebiet der Mathematik, sondern sie umfaßt einen erheblichen Teil der theoretischen Physik. Aus diesem weiten Gebiet soll in diesem Buch, das aus Vorlesungen in Tübingen und Hamburg entstanden ist, ein Ausschnitt geboten werden, der nicht allein im Werdegang der Anwendungen der Analysis auf die Geometrie, sondern auch in Geschmack- und Arbeitsrichtung des Verfassers begründet ist. Als Leitstern möge uns *Felix Kleins* Erlanger Programm dienen. Ferner sollen besonders die Beziehungen zur Variationsrechnung gepflegt werden.

Als ich 1908 nach Bonn kam, hat mich *E. Study* trotz seiner schweren Erkrankung seines persönlichen Unterrichts gewürdigt und mir die kritischen Untersuchungen zur Differentialgeometrie vorgetragen, an denen er damals arbeitete. In dankbarem Gedenken an die schönen Bonner Tage sei Herrn *Study* dieses Bändchen gewidmet.

Bei der Herausgabe der Vorlesung haben mich zahlreiche Fachgenossen unterstützt, nämlich die Herren *Baule, Berwald, Bieberbach, Hessenberg, Kruppa, Liebmann, Ostrowski, Radon, Reidemeister, Salkowski* und *Zindler*. Insbesondere bin ich auch Fräulein *E. Linde* für ihre Hilfe dankbar.

Mathematisches Seminar, Hamburg, im September 1921.

Inhaltsverzeichnis.

Für ein erstes Studium genügt die Kenntnis der Kapitel 1, 3 und 4. Die Abschnitte dieser Kapitel, die übergangen werden können, sind durch Sternchen gekennzeichnet.

1. Kapitel.

Kurventheorie.

Seite

§ 1. Bogenlänge 1
§ 2. Tangente 3
§ 3. Schmiegebene 4
§ 4.* Ein Mittelwertsatz von *H. A. Schwarz* und *T. J. Stieltjes* 7
§ 5. Krümmung und Windung 9
§ 6. Formeln von *Frenet* 11
§ 7. Über das Vorzeichen der Windung 13
§ 8.* Kinematische Deutung von *Frenet*s Formeln 14
§ 9. Ebene Kurven, Vierscheitelsatz 15
§ 10. Krümmungsmittelpunkt 17
§ 11. Schmiegkugel 17
§ 12. *Bertrand*kurven 19
§ 13. Natürliche Gleichungen 20
§ 14. Hilfssatz über lineare Differentialgleichungen 22
§ 15. Böschungslinien 23
§ 16. Böschungslinien auf einer Kugel 24
§ 17. Böschungslinien auf einem Drehparaboloid 25
§ 18. Evoluten, Evolventen 26
§ 19. Isotrope Kurven 27
§ 20. Integrallose Darstellung der isotropen Kurven 29
§ 21. Aufgaben und Lehrsätze 30

2. Kapitel.

Extreme bei Kurven.

§ 22. Die erste Variation der Bogenlänge 34
§ 23. Variationsprobleme von *J. Radon* 35
§ 24. Bestimmung der Extremalen unsrer Variationsprobleme 37
§ 25. Die Isoperimetrie des Kreises 39
§ 26. Beweis von *G. Frobenius* 40
§ 27. Ein Beweis von *A. Hurwitz* 42
§ 28. Ein Hilfssatz über Kurven auf der Kugel 45
§ 29. Sätze von *H. A. Schwarz* für Raumkurven fester Krümmung 47
§ 30. Weitere Ungleichheiten von *H. A. Schwarz* für Kurven fester Krümmung 48
§ 31. Bemerkungen und Aufgaben 49

3. Kapitel.

Anfangsgründe der Flächentheorie.

Seite

§ 32. Die erste Grundform 52
§ 33. Die zweite Grundform 54
§ 34. Sätze von *Meusnier* und *Euler* 55
§ 35. Die Hauptkrümmungen 57
§ 36. *Gaußens* Theorema egregium 59
§ 37. Krümmungslinien 60
§ 38. Nabelpunkte 62
§ 39. Satz von *Dupin* über Orthogonalsysteme 63
§ 40. Die winkeltreuen Abbildungen des Raumes 65
§ 41. *Gaußens* sphärisches Abbild einer Fläche 67
§ 42. Normalensysteme 69
§ 43. Asymptotenlinien 71
§ 44. Asymptotenlinien auf geradlinigen Flächen 72
§ 45. Konjugierte Netze 74
§ 46. Ableitungsformeln von *Weingarten* 75
§ 47. Satz von *Beltrami* und *Enneper* über die Windung der Asymptotenlinien 76
§ 48. Die Ableitungsformeln von *Gauß* 77
§ 49. Grundformeln von *Gauß und Codazzi* 79
§ 50. *G. Monge* 80
§ 51. Aufgaben und Lehrsätze 81

4. Kapitel.

Geometrie auf einer Fläche.

§ 52. Verbiegung 87
§ 53. Geodätische Krümmung 88
§ 54. Räumliche Deutung der geodätischen Krümmung 90
§ 55.* Beweis von *Radon* für einen Satz von *Schwarz* 92
§ 56. Geodätische Linien 93
§ 57. Geodätische Polarkoordinaten 95
§ 58. Noch einmal *Gaußens* Theorema egregium 96
§ 59. Zwei verschiedene Erklärungen der geodätischen Kreise 99
§ 60. Flächen festen Krümmungsmaßes 100
§ 61. Abbildung der Flächen festen negativen Krümmungsmaßes auf *Poincarés* Halbebene 101
§ 62. Längentreue Abbildungen einer Fläche mit $K = -1$ auf sich selbst 103
§ 63. Das Integral der geodätischen Krümmung 107
§ 64. Folgerungen aus der Integralformel von *Gauß* und *Bonnet* 108
§ 65. Über Hüllkurven von geodätischen Linien 111
§ 66. *Beltramis* erster Differentiator 112
§ 67. *Beltramis* zweiter Differentiator 114
§ 68. Formeln nach *Green* 115
§ 69. Allgemeine Formel für die geodätische Krümmung 116
§ 70.* Flächen, deren geodätische Krümmungskreise geschlossen sind . . 117
§ 71. Isotherme Parameter 119
§ 72. Winkeltreue Abbildung 121
§ 73. Die Förderung der Flächentheorie durch *Gauß* 123
§ 74. Aufgaben und Lehrsätze 123

5. Kapitel.

Fragen der Flächentheorie im großen.

§ 75. Unverbiegbarkeit der Kugel 127
§ 76. Die Kugeln als einzige Eiflächen mit fester mittlerer Krümmung . 130

Seite
§ 77. Starrheit der Eiflächen 131
§ 78. *Minkowskis* Stützfunktion 134
§ 79. Ein Satz *Christoffels* über geschlossene Flächen 136
§ 80. Ein Satz von *Hilbert* über Flächen festen negativen Krümmungsmaßes 138
§ 81. Bemerkungen über geschlossene geodätische Linien auf einer Eifläche nach *H. Poincaré* 141
§ 82. *Erdmanns* Eckbedingung 143
§ 83. Die Bedingung von *Jacobi* 145
§ 84. Satz von *Bonnet* über den Durchmesser einer Eifläche 148
§ 85. Das Vorhandensein kürzester Wege auf Eiflächen 150
§ 86. Flächen, deren konjugierte Punkte festen geodätischen Abstand haben 155
§ 87. Ein Satz *Carathéodorys* über die Hüllkurven geodätischer Linien auf Eiflächen 158
§ 88. Aufgaben und Lehrsätze 160

6. Kapitel.

Extreme bei Flächen.

§ 89. Erste Variation der Oberfläche 164
§ 90. Die Minimalflächen als Schiebflächen 165
§ 91. Formeln von *Weierstraß* für Minimalflächen 166
§ 92. Formeln von *Study* für Minimalflächen 168
§ 93. Eine allgemeine Formel von *Gauß* für die erste Variation der Oberfläche 170
§ 94. Eine Formel von *Schwarz* für die Oberfläche einer Minimalfläche 172
§ 95. Bestimmung einer Minimalfläche durch einen Streifen 173
§ 96. Ein Satz von *Carleman* über den Kreis 175
§ 97. Isoperimetrie der Kugel 176
§ 98. Wirkung von *Steiners* Symmetrisierung auf die Oberfläche 178
§ 99. Konvergenzbeweis von *Wilhelm Groß* 179
§ 100. Zweite Variation der Oberfläche 183
§ 101. Erste Variation von H und K 185
§ 102. Aufgaben und Lehrsätze 187

7. Kapitel.

Liniengeometrie.

§ 103. *Studys* Übertragungsprinzip 190
§ 104. Geradlinige Flächen 193
§ 105. Besondere geradlinige Flächen 198
§ 106. Strahlensysteme 201
§ 107. Übertragung der Integralformeln von *Gauß* und *Bonnet* auf Strahlensysteme 203
§ 108. Brennflächen eines Strahlensystems 205
§ 109. Formeln von *Hamilton* und *Mannheim* 206
§ 110. Isotrope Strahlensysteme 207
§ 111. Beziehungen zu den Minimalflächen 209
§ 112. Darstellung der isotropen Strahlensysteme durch stereographische Linienkoordinaten 212
§ 113. Weitere Formeln für stereographische Linienkoordinaten 216
§ 114. Zusammenhang mit der Theorie der Minimalflächen nach *Weierstraß* 217
§ 115. Bemerkungen und Aufgaben 219
Namen- und Stichwortverzeichnis 225
Berichtigung 230

Anmerkungen und Formeln sind innerhalb eines jeden Kapitels durchnumeriert.

1. Kapitel.

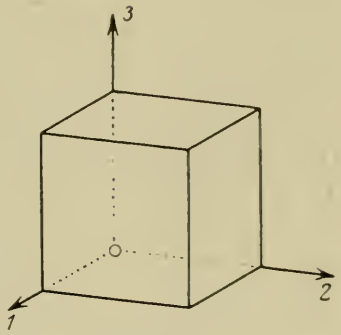
Kurventheorie.

§ 1. Bogenlänge.

Eine räumliche Kurve kann man dadurch festlegen, daß man die rechtwinkligen Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Kurvenpunktes als Funktionen eines Parameters t gibt

$$x_k = x_k(t), \qquad k = 1, 2, 3.$$

Es soll von den Funktionen $x_k(t)$ im folgenden in der Regel angenommen werden, daß sie „analytisch" sind, sich also nach Potenzen von t oder $t - t_0$ entwickeln lassen. Wir werden ferner im allgemeinen nur reelle Parameterwerte und nur reelle analytische Funktionen zulassen. Natürlich dürfen unsre drei Funktionen $x_k(t)$ nicht alle drei konstant sein, sonst schrumpft die Kurve auf einen einzelnen Punkt zusammen. Von den Koordinatenachsen werden wir voraussetzen, daß sie so zueinander liegen, wie das in der Fig. 1 angedeutet ist.



Figur 1.

Die Entfernung zweier Nachbarpunkte, die zu den Parameterwerten t und $t + dt$ gehören, ist

$$(1) \qquad ds = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2}\, dt,$$

und das Integral

$$(2) \qquad \boxed{s = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}\, dt}$$

wird als die Bogenlänge unsrer Kurve bezeichnet.

Es sei kurz darauf hingewiesen, wie man diese Bogenlänge durch Grenzübergang aus der Länge von „einbeschriebenen" Vielecken erhält. Setzt man

$$(3) \qquad a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b,$$

so ist die Länge eines unserm Kurvenbogen einbeschriebenen Vielecks

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\{x_1(t_k) - x_1(t_{k-1})\}^2 + \cdots} \tag{4}$$

Wendet man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an, so wird

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{x_1'(t_k^{(1)})^2 + x_2'(t_k^{(2)})^2 + x_3'(t_k^{(3)})^2}, \tag{5}$$

wobei

$$t_{k-1} \leqq t_k^{(i)} \leqq t_k; \qquad i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

An Stelle der drei Mittelwerte $t_k^{(i)}$ soll ein einziger τ_k gesetzt und der entstehende Fehler abgeschätzt werden:

$$\sqrt{x_1'(t_k^{(1)})^2 + \cdots} - \sqrt{x_1'(\tau_k)^2 + \cdots} = \frac{\{x_1'(t_k^{(1)}) - x_1'(\tau_k)\}\{x_1'(t_k^{(1)}) + x_1'(\tau_k)\} + \cdots}{\sqrt{x_1'(t_k^{(1)})^2 + \cdots} + \sqrt{x_1'(\tau_k)^2 + \cdots}}. \tag{7}$$

Wählt man die Zwischenwerte t_k so dicht, daß

$$|x_i'(t_k) - x_i'(t_{k-1})| < \varepsilon \tag{8}$$

wird, was wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der x_i' in $a \leqq t \leqq b$ möglich ist, so folgt aus (7)

$$\left|\sqrt{x_1'(t_k^{(1)})^2 + \cdots} - \sqrt{x_1'(\tau_k)^2 + \cdots}\right| \leqq |x_1'(t_k^{(1)}) - x_1'(\tau_k)| + \cdots < 3\varepsilon, \tag{9}$$

da der Absolutwert der durch den Nenner geteilten zweiten Faktoren in (7) sicher $\leqq 1$ ist. Somit ist

$$\left|\sigma_n - \Sigma (t_k - t_{k-1}) \sqrt{x_1'(\tau_k)^2 + x_2'(\tau_k)^2 + x_3'(\tau_k)^2}\right| \leqq 3\varepsilon (b - a). \tag{10}$$

Verfeinert man nun die Einteilung $t_0, t_1, \ldots t_n$, so daß ε gegen Null geht, so wird

$$\lim \sigma_n = \int_a^b dt \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}, \tag{11}$$

wie behauptet wurde. Die einzige kleine Schwierigkeit, die zu überwinden war, um auf die übliche Näherungsformel für das bestimmte Integral zu kommen, war die Verschiedenheit der drei Zwischenwerte $t_k^{(i)}$.

Man kann an Stelle von t als neuen Parameter auf der Kurve den Bogen

$$s = \int_a^t \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}\, dt \tag{12}$$

einführen. Zur Festlegung dieses besonderen Parameters ist noch die Wahl des Anfangspunktes $t = a$ der Zählung ($s = 0$) und die Wahl des „positiven Sinnes“ auf der Kurve erforderlich, der wachsenden s-Werten entspricht. Nimmt man in (12) die Wurzel positiv, so wird

der positive Sinn auch den zunehmenden t-Werten entsprechen. Für den Bogen als Parameter ($s = \pm t +$ konst.) ist kennzeichnend

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1. \tag{13}$$

Als einfachstes Beispiel für eine unebene Kurve nehmen wir eine Schraubenlinie auf einem Kreiszylinder vom Halbmesser a

$$x_1 = a\cos t, \quad x_2 = a\sin t, \quad x_3 = bt. \tag{14}$$

Wir finden

$$x_1' = -a\sin t, \quad x_2' = a\cos t, \quad x_3' = b \tag{15}$$

und daraus

$$s = t\sqrt{a^2 + b^2}. \tag{16}$$

§ 2. Tangente.

Als „*Koordinaten*" des „*Vektors*", der vom Kurvenpunkt $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ zum Kurvenpunkt $x_1(t+h)$, $x_2(t+h)$, $x_3(t+h)$ hinführt, können wir die Differenzen

$$x_i(t+h) - x_i(t) \tag{17}$$

bezeichnen. Zwei Vektoren heißen gleich, wenn die entsprechenden Koordinaten übereinstimmen. Der Vektor vom Ursprung zum Punkt $x_i(t)$ soll mit $\mathfrak{x}(t)$ bezeichnet werden. Definiert man dann die Linearkombination von Vektoren durch die Linearkombination entsprechender Koordinaten, so können wir den Vektor mit den Koordinaten

$$\frac{x_i(t+h) - x_i(t)}{h} \tag{18}$$

mit

$$\frac{\mathfrak{x}(t+h) - \mathfrak{x}(t)}{h} \tag{19}$$

bezeichnen. Dieser Vektor hat dieselbe Richtung wie die Verbindungssehne der Kurvenpunkte, die zu den Parameterwerten t und $t+h$ gehören. Für $h \to 0$ geht der Sehnenvektor über in den „Tangentenvektor"

$$\mathfrak{x}'(t) \text{ mit den Koordinaten } x_i'(t) \tag{20}$$

an der Stelle t. Deutet man t als Zeit, so nennt man $\mathfrak{x}'(t)$ den „*Geschwindigkeitsvektor*".

Als Grenzlage der Sehne ergibt sich so die Tangente, die mittels eines Parameters r folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\boxed{\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + r\mathfrak{x}'}, \tag{21}$$

d. h. ausführlich:

$$y_i = x_i + r x_i', \tag{22}$$

so daß, wenn alle $x_i' \neq 0$ sind,

$$\frac{y_1 - x_1}{x_1'} = \frac{y_2 - x_2}{x_2'} = \frac{y_3 - x_3}{x_3'} \tag{23}$$

als Gleichungspaar der Tangente in den laufenden Koordinaten y_i angesehen werden kann. Die Tangentenformeln (21) — (23) werden unbrauchbar, wenn der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{x}' = 0$ ist, d. h. wenn alle $x_i' = 0$ sind ($i = 1, 2, 3$). Das kann an der Parameterdarstellung liegen oder auch daran, daß unsre Kurve an der betreffenden Stelle ein besonderes Verhalten zeigt. Wir wollen im folgenden $\mathfrak{x}' \neq 0$ annehmen.

Denkt man in (22) t und r veränderlich, so hat man, wenn unsre Kurve nicht geradlinig ist, die Parameterdarstellung einer Fläche vor sich, die von den Kurventangenten überstrichen wird. Wie bei der Parameterdarstellung einer Kurve ein einziger Parameter t zur Anwendung kommt, so bei der Darstellung einer Fläche deren zwei: r, t.

Für $t = s$ haben wir $x_1'^2 + \ldots = 1$, d. h. der Geschwindigkeitsvektor hat die Länge Eins, er ist ein Einheitsvektor. Wir wollen, um dies kürzer schreiben zu können, eine gebräuchliche Abkürzung einführen. Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ zwei Vektoren mit den Koordinaten x_i, y_i, so soll der bilineare Ausdruck

$$\boxed{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \mathfrak{x}\mathfrak{y}} \tag{24}$$

als *skalares* oder *inneres Produkt* der Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bezeichnet werden. Dann ist

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0 \tag{25}$$

die Bedingung für das Senkrechtstehen zweier Vektoren und

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^2 = l^2 \tag{26}$$

das Quadrat der Länge l des Vektors $\mathfrak{x}$. Für $t = s$ haben wir dann

$$\mathfrak{x}'^2 = 1. \tag{27}$$

Allgemein bedeutet das skalare Produkt $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}$ das Produkt der Längen mal dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels.

Sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ beide von einem Parameter abhängig, so wird das skalare Produkt folgendermaßen differenziert:

$$\frac{d}{dt} \Sigma x_i y_i = \Sigma x_i' y_i + \Sigma x_i y_i', \tag{28}$$

was sich abgekürzt so schreibt:

$$\frac{d}{dt} (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}'\mathfrak{y} + \mathfrak{x}\mathfrak{y}'. \tag{29}$$

§ 3. Schmiegebene.

Legen wir durch drei Kurvenpunkte t, $t + h$, $t + k$ die Sehnenvektoren

$$\begin{cases} \mathfrak{v} = \dfrac{\mathfrak{x}(t+h) - \mathfrak{x}(t)}{h} = \mathfrak{x}'(t) + \dfrac{h}{2!}\mathfrak{x}''(t) + \dfrac{h^2}{3!}\mathfrak{x}'''(t) + \ldots, \\ \mathfrak{w} = \dfrac{\mathfrak{x}(t+k) - \mathfrak{x}(t)}{k} = \mathfrak{x}'(t) + \dfrac{k}{2!}\mathfrak{x}''(t) + \dfrac{k^2}{3!}\mathfrak{x}'''(t) + \ldots, \end{cases} \tag{30}$$

so bestimmen sie dieselbe Ebene wie die Vektoren

$$\mathfrak{v} \quad \text{und} \quad \frac{2(\mathfrak{w}-\mathfrak{v})}{k-h} = \mathfrak{x}''(t) + \frac{(k+h)}{3}(\ldots).$$

Durch den Grenzübergang $h \to 0$, $k \to 0$ erhält man daraus die Vektoren

$$\mathfrak{x}'(t) \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}''(t),$$

die, wenn sie nicht gleichgerichtet sind, die Grenzlage der Ebene durch drei benachbarte Kurvenpunkte festlegen. Man bezeichnet diese Ebene als *Schmiegebene*. Ist $\mathfrak{y}$ ein beliebiger Punkt in ihr, so liegen die drei Vektoren $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{y} - \mathfrak{x}$ in einer Ebene, was sich durch das Verschwinden der Determinante

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} y_1 - x_1 & x_1' & x_1'' \\ y_2 - x_2 & x_2' & x_2'' \\ y_3 - x_3 & x_3' & x_3'' \end{vmatrix} = 0$$

ausdrückt, wofür wir zur Abkürzung

$$(32) \qquad \boxed{(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'') = 0}$$

schreiben. (31) oder (32) ist also die *Gleichung der Schmiegebene*.

$\mathfrak{x}''$ pflegt man in der Mechanik als „*Beschleunigungsvektor*“ zu bezeichnen, so daß demnach die Schmiegebene durch Kurvenpunkt, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor festgelegt ist.

Ein Ausnahmefall tritt nur dann ein, wenn die Vektoren $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ gleichgerichtet sind, wenn es also zwei Zahlen a und b gibt, di nicht alle beide Null sind, so daß $a\mathfrak{x}' + b\mathfrak{x}'' = 0$ ist, od er, w as selbe besagt, wenn alle Determinanten

$$(33) \qquad x_i' x_k'' - x_k' x_i'' \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

gleichzeitig verschwinden. Um auch das in Vektoren leicht schreiben zu können, bezeichnet man den Vektor mit den Koordinaten

$$(34) \qquad \begin{aligned} y_1 &= x_2' x_3'' - x_3' x_2'', \\ y_2 &= x_3' x_1'' - x_1' x_3'', \\ y_3 &= x_1' x_2'' - x_2' x_1'' \end{aligned}$$

als *Vektorprodukt* oder *äußeres Produkt* von $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ und schreibt etwa

$$(35) \qquad \boxed{\mathfrak{y} = \mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}''}.$$

Geometrisch ist der Produktvektor $\mathfrak{y}$ so festgelegt: 1. $\mathfrak{y}$ steht auf $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ senkrecht; 2. die Länge von $\mathfrak{y}$ ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$; 3. der Sinn von $\mathfrak{y}$ ist so zu wählen, daß die drei Vektoren $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{y}$ ebenso aufeinanderfolgen wie die Koordinatenachsen (Fig. 1).

Es gelten dann, wie man sofort sieht, die Rechenregeln

$$\mathfrak{x} \times (\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = \mathfrak{x} \times \mathfrak{y} + \mathfrak{x} \times \mathfrak{z}, \qquad \mathfrak{x} \times \mathfrak{y} = -\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}, \tag{36}$$

$$\frac{d}{dt}\{\mathfrak{x}(t) \times \mathfrak{y}(t)\} = (\mathfrak{x}' \times \mathfrak{y}) + (\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}'). \tag{37}$$

Es ist also

$$\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}'' = 0 \tag{38}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für die „lineare Abhängigkeit“ $(a\mathfrak{x}' + b\mathfrak{x}'' = 0)$ der Vektoren $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$. Ebenso ist

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}) = 0 \tag{39}$$

die Bedingung für die lineare Abhängigkeit $(a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} + c\mathfrak{z} = 0)$ dreier Vektoren. Die Abhängigkeit zweier bedeutet Übereinstimmung der Richtung und die von dreien, daß die Vektoren zu einer Ebene parallel liegen. Die geometrische Bedeutung der Determinante $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})$ ist bekanntlich der mit einem geeigneten Vorzeichen versehene Rauminhalt des Parallelflachs über den drei Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$.

Ist $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} \times \mathfrak{y}$, so steht $\mathfrak{z}$ auf $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ senkrecht, denn es ist z. B.

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}) = 0.$$

Wir führen weiter die leicht zu bestätigenden Rechenregeln an:

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{y} \times \mathfrak{z}) = \mathfrak{y}(\mathfrak{z} \times \mathfrak{x}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}), \tag{40}$$

dann den Multiplikationssatz für Determinanten:

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}'\,\mathfrak{z}') = \begin{vmatrix} (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}') & (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}') & (\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}') \\ (\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}') & (\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}') & (\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}') \\ (\mathfrak{z}\,\mathfrak{x}') & (\mathfrak{z}\,\mathfrak{y}') & (\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}') \end{vmatrix} \tag{41}$$

und die „Identität von *J. L. Lagrange*“

$$\boxed{(\mathfrak{x} \times \mathfrak{y})(\mathfrak{x}' \times \mathfrak{y}') = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}')(\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}') - (\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}')(\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}')}. \tag{42}$$

Hieraus folgt ferner

$$(\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}) \times \mathfrak{z} = (\mathfrak{x}\,\mathfrak{z})\mathfrak{y} - (\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})\mathfrak{x}. \tag{43}$$

Wir benutzen hier die Vektorenschreibweise nur nebenbei zur Abkürzung. Eine systematische Darstellung der Vektor- und Tensorrechnung soll erst im dritten Teil der Vorlesung folgen.

Wann tritt der Ausnahmefall ein, daß $\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}''$ längs einer Kurve identisch verschwindet? Da $\mathfrak{x}'$ nicht identisch Null sein darf, wenn die Kurve nicht auf einen einzigen Punkt zusammenschrumpfen soll, so muß $\mathfrak{x}''$ von $\mathfrak{x}'$ linear abhängen:

$$\mathfrak{x}'' = \varphi\,\mathfrak{x}'.$$

Durch Integration dieser drei vektoriell zusammengefaßten Differentialgleichungen folgt

$$x_i = c_i f(t) + C_i, \qquad f(t) = \int e^{\int \varphi\, dt}\, dt.$$

Dadurch sind aber die geraden Linien gekennzeichnet. Somit verschwindet $\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}''$ nur bei den Geraden identisch.

§ 4. Ein Mittelwertsatz von *H. A. Schwarz* und *T. J. Stieltjes*.

Das Vorhandensein der Schmiegebene läßt sich auch unter allgemeineren Voraussetzungen über die Funktionen $x_i(t)$ erweisen. Da diese Schlußweise für viele verwandte Fragen kennzeichnend ist, wollen wir hier darauf eingehen.

Von den Funktionen $x_i(t)$ sei jetzt nur vorausgesetzt, daß sie in $a \leqq t \leqq b$ mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig seien und daß $\mathfrak{x}'(t) \times \mathfrak{x}''(t) \neq 0$ sei. Wählen wir in a, b drei verschiedene t-Werte $a < t_1 < t_2 < t_3 < b$, so wird behauptet: *Wenn die t_1, t_2, t_3 im übrigen beliebig gegen denselben Wert t rücken, so geht die Gleichung der Ebene durch die Punkte $\mathfrak{x}(t_1)$, $\mathfrak{x}(t_2)$, $\mathfrak{x}(t_3)$ über in die Gleichung*

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'') = 0 . \tag{32}$$

Zum Beweis stellen wir die Gleichung der ursprünglichen Ebene auf

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & x_1(t_1) & x_2(t_1) & x_3(t_1) \\ 1 & x_1(t_2) & x_2(t_2) & x_3(t_2) \\ 1 & x_1(t_3) & x_2(t_3) & x_3(t_3) \end{vmatrix} = 0 \tag{44}$$

oder

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2(t_1) & x_3(t_1) \\ 1 & x_2(t_2) & x_3(t_2) \\ 1 & x_2(t_3) & x_3(t_3) \end{vmatrix} \{y_1 - x_1(t_1)\} + \begin{vmatrix} 1 & x_3(t_1) & x_1(t_1) \\ 1 & x_3(t_2) & x_1(t_2) \\ 1 & x_3(t_3) & x_1(t_3) \end{vmatrix} \{y_2 - x_2(t_1)\} + \begin{vmatrix} 1 & x_1(t_1) & x_2(t_1) \\ 1 & x_1(t_2) & x_2(t_2) \\ 1 & x_1(t_3) & x_2(t_3) \end{vmatrix} \{y_3 - x_3(t_1)\} = 0 . \tag{45}$$

Da die dreireihigen Determinanten mit $t_i - t_k$ Null werden, wollen wir die Gleichung dividieren durch

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{vmatrix} = (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1) \neq 0 . \tag{46}$$

Die Brüche wie z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1(t_1) & x_2(t_1) \\ 1 & x_1(t_2) & x_2(t_2) \\ 1 & x_1(t_3) & x_2(t_3) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{vmatrix} = A_3 \tag{47}$$

sollen nun abgeschätzt werden. Ersetzt man in der linken Seite der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1(t_1) & x_2(t_1) \\ 1 & x_1(t_2) & x_2(t_2) \\ 1 & x_1(t_3) & x_2(t_3) \end{vmatrix} - A_3 \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{48}$$

t_3 durch eine Veränderliche t, so erhält man eine Funktion von t, die für $t = t_2$ und $t = t_3$ verschwindet, also für eine Zwischenstelle $t_2 < t_3' < t_3$ verschwindende Ableitung hat:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1(t_1) & x_2(t_1) \\ 1 & x_1(t_2) & x_2(t_2) \\ 0 & x_1'(t_3') & x_2'(t_3') \end{vmatrix} - A_3 \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 0 & 1 & 2t_3' \end{vmatrix} = 0 . \tag{49}$$

Ersetzt man jetzt t_2 durch eine Veränderliche t, so entsteht eine Funktion, die für $t = t_1$, $t = t_2$ Null wird und deren Ableitung somit für $t_1 < t_2' < t_2$ verschwindet:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1(t_1) & x_2(t_1) \\ 0 & x_1'(t_2') & x_2'(t_2') \\ 0 & x_1'(t_3') & x_2'(t_3') \end{vmatrix} - A_3 \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 0 & 1 & 2t_2' \\ 0 & 1 & 2t_3' \end{vmatrix} = 0 . \tag{50}$$

Ersetzt man jetzt linker Hand t_3' durch t, so erhält man eine Funktion, die für $t = t_2'$ und $t = t_3'$ Null wird, und somit ist für $t_1 < t_2' < t_3'' < t_3' < t_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1(t_1) & x_2(t_1) \\ 0 & x_1'(t_2') & x_2'(t_2') \\ 0 & x_1''(t_3'') & x_2''(t_3'') \end{vmatrix} - A_3 \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 0 & 1 & 2t_2' \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 . \tag{51}$$

Damit ist die gewünschte Abschätzung für den Bruch A_3 gewonnen, nämlich, wenn die Bezeichnung etwas vereinfacht wird,

$$A_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1'(t') & x_2'(t') \\ x_1''(t'') & x_2''(t'') \end{vmatrix}, \tag{52}$$

wobei $t_1 < t' < t'' < t_3$ gilt. Schätzt man in unserer Ebenengleichung

$$A_1\{y_1 - x_1(t_1)\} + A_2\{y_2 - x_2(t_1)\} + A_3\{y_3 - x_3(t_1)\} = 0$$

auch die Brüche A_1 und A_2 entsprechend ab, so erkennt man sofort, daß beim Grenzübergang wirklich die Gleichung $(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'') = 0$ entsteht wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Ableitungen.

Das Verfahren geht ursprünglich auf *H. A. Schwarz* (1880) zurück, in der hier entwickelten Weise auf *T. J. Stieltjes* (1888)[1]. Durch eine leichte Verallgemeinerung ergibt sich folgender Mittelwertsatz.

Haben die Funktionen $x_i(t)$ Ableitungen bis zur Ordnung $n-1$ für $a \leqq t \leqq b$ und ist $a \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$, so ist

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) & \ldots & x_n(t_1) \\ x_1(t_2) & x_2(t_2) & \ldots & x_n(t_2) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1(t_n) & x_2(t_n) & \ldots & x_n(t_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t_1 & \ldots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & \ldots & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & t_n & \ldots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}} = \frac{1}{1!\,2!\ldots(n-1)!} \begin{vmatrix} x_1(\tau_1) & x_2(\tau_1) & \ldots & x_n(\tau_1) \\ x_1'(\tau_2) & x_2'(\tau_2) & \ldots & x_n'(\tau_2) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{(n-1)}(\tau_n) & x_2^{(n-1)}(\tau_n) & \ldots & x_n^{(n-1)}(\tau_n) \end{vmatrix} \tag{53}$$

[1] *H. A. Schwarz*, Abhandlungen II, Berlin 1890, S. 296-302, *T. J. Stieltjes*, Oeuvres II, Groningen 1918, S. 110-123.

Dabei gelten für die Zwischenwerte τ die Beziehungen

$$\begin{aligned} \tau_1 &= t_1, \\ \tau_1 < \tau_2 &< t_2, \\ \tau_2 < \tau_3 &< t_3, \\ &\cdots\cdots \\ \tau_{n-1} < \tau_n &< t_n. \end{aligned} \tag{54}$$

§ 5. Krümmung und Windung.

Nehmen wir jetzt die Bogenlänge als Kurvenparameter

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s), \quad \mathfrak{x}'^2 = 1,$$

so wird

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'' = 0, \tag{55}$$

d. h. der in der Schmiegebene gelegene Beschleunigungsvektor steht auf der Kurventangente senkrecht. Man nennt jede Gerade durch den Kurvenpunkt $\mathfrak{x}$ senkrecht zur Tangente $\mathfrak{x}'$ eine „*Kurvennormale*" und insbesondere die Kurvennormale in der Schmiegebene „*Hauptnormale*". $\mathfrak{x}''$ gibt also die Richtung der Hauptnormalen an.

Trägt man vom Koordinatenursprung $\mathfrak{o}$ aus den Einheitsvektor $\mathfrak{x}'$ ab, so durchläuft sein Endpunkt auf der Einheitskugel um $\mathfrak{o}$ eine Kurve $\mathfrak{x}'(s)$, wenn $\mathfrak{x}$ die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ beschreibt. Diese Kurve $\mathfrak{x}'(s)$ nennt man das *Tangentenbild* von $\mathfrak{x}(s)$. $\mathfrak{x}'(s)$ schrumpft nur dann auf einen Punkt zusammen ($\mathfrak{x}'(s) = \text{konst.}$), wenn $\mathfrak{x}(s)$ geradlinig ist ($\mathfrak{x} = \mathfrak{x}' \cdot s + \text{konst.}$). Das Bogenelement des Tangentenbildes sei mit ds_1 bezeichnet. Nach der Formel (1) findet man

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = \mathfrak{x}''^2. \tag{56}$$

Da $ds_1 : ds$ nur für die Geraden identisch verschwindet, also gewissermaßen die Abweichung der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ an der betrachteten Stelle s von der Geraden mißt, so nennt man $ds_1 : ds$ die „*Krümmung*" von $\mathfrak{x}(s)$ an der betreffenden Stelle. Man bezeichnet die Krümmung üblicherweise mit $1 : \varrho$. Wir finden also

$$\boxed{\frac{1}{\varrho} = \frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\mathfrak{x}''^2}}. \tag{57}$$

Das Vorzeichen der Wurzel kann beliebig gewählt werden. $1 : \varrho$ ist also die Länge des Beschleunigungsvektors und $\varrho\,\mathfrak{x}''$ ist ein Einheitsvektor auf der Hauptnormalen, wenn $\mathfrak{x}'' \neq 0$ ist, wie wir hier voraussetzen wollen.

Die Kurvennormale, die auf der Schmiegebene senkrecht steht, nennt man „*Binormale*". Ihre Richtung ist die von $\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}''$, denn dieser Produktvektor steht auf $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ senkrecht.

Wir wollen nun drei Einheitsvektoren zu jedem Kurvenpunkt $\mathfrak{x}(s)$ einführen: 1. den *Tangentenvektor*

$$\mathfrak{x}'(s) = \xi_1(s), \tag{58}$$

2. den *Hauptnormalenvektor*

$$\varrho\mathfrak{x}''(s) = \varrho\xi_1'(s) = \xi_2(s) \tag{59}$$

und 3. den *Binormalenvektor* $\xi_3(s)$. Wir erklären ihn durch die Formel

$$\xi_3 = \xi_1 \times \xi_2 = \varrho(\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}''). \tag{60}$$

ξ_3 steht in der Tat auf ξ_1, ξ_2 senkrecht. ξ_3 ist ein Einheitsvektor; denn nach der Identität von *Lagrange* [§ 3, (43)] und wegen $\xi_1\xi_2 = 0$ ist

$$\xi_3^2 = \xi_1^2\xi_2^2 - (\xi_1\xi_2)^2 = 1. \tag{61}$$

Schließlich folgen die Vektoren ξ_1, ξ_2, ξ_3 so aufeinander wie die drei Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen, d. h. es ist

$$(\xi_1\xi_2\xi_3) = (\xi_1 \times \xi_2)\xi_3 = \xi_3^2 = +1. \tag{62}$$

Aus $\xi_1 \times \xi_2 = \xi_3$ folgt übrigens für unsere drei Einheitsvektoren auch $\xi_2 \times \xi_3 = \xi_1$ und $\xi_3 \times \xi_1 = \xi_2$.

Um die Krümmung zu erklären, haben wir vom Ursprung aus die Vektoren $\xi_1(s)$ abgetragen und die Bogenlänge ds_1 des entstehenden „Tangentenbildes" berechnet. Entsprechend erklären wir jetzt die „*Windung*" oder „*Torsion*" dadurch, daß wir vom Ursprung aus die Binormalenvektoren $\xi_3(s)$ abtragen. Ihre Endpunkte erfüllen das „*Binormalenbild*" von $\mathfrak{x}(s)$. Den Quotienten der Bogenelemente

$$\boxed{\frac{ds_3}{ds} = \sqrt{\xi_3'^2} = \frac{1}{\tau}} \tag{63}$$

wollen wir als „Windung" bezeichnen. Für *ebene* Kurven ist $\xi_3 = \text{konst.}$, also die Windung Null. Somit ist die Windung ein Maß für die Abweichung unsrer Kurve $\mathfrak{x}(s)$ von ihrer Schmiegebene.

Durch (63) ist $1:\tau$ wieder nur abgesehen vom Vorzeichen erklärt. Wir können jedoch diese Unbestimmtheit beseitigen. Der Vektor ξ_3' nämlich läßt sich sicher aus den linear unabhängigen Einheitsvektoren ξ_1, ξ_2, ξ_3 kombinieren:

$$\xi_3' = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3. \tag{64}$$

Nun ist ξ_3 ein Einheitsvektor, also $\xi_3^2 = 1$ und daraus $\xi_3\xi_3' = a_3 = 0$. Ferner ist nach (59)

$$\xi_1' = \frac{\xi_2}{\varrho} \tag{65}$$

und somit

$$\frac{d}{ds}(\xi_1\xi_3) = \frac{1}{\varrho}(\xi_2\xi_3) + \xi_1\xi_3' = 0, \tag{66}$$

also wegen $\xi_2\xi_3 = 0$

$$\xi_1\xi_3' = a_1 = 0.$$

Es bleibt also

$$\xi_3' = a_2\xi_2 \tag{67}$$

und nach (63)

$$\xi_3'^2 - a_2^2 = \frac{1}{\tau^2}.$$

Wir entscheiden jetzt über das Vorzeichen von $1:\tau$, wenn wir $a_2 = -1:\tau$ setzen und somit die Windung durch die Formel erklären:

$$\xi_3' = -\frac{\xi_2}{\tau}. \tag{68}$$

§ 6. Formeln von Frenet.

Wir hatten (65) $\xi_1' = \xi_2 : \varrho$ und (68) $\xi_3' = -\xi_2 : \tau$. Wir wollen noch die Ableitung ξ_2' aus ξ_1, ξ_2, ξ_3 zusammensetzen. Wir finden

$$\xi_2 = \xi_3 \times \xi_1 \tag{69}$$

und daraus

$$\xi_2' = (\xi_3' \times \xi_1) + (\xi_3 \times \xi_1'),$$

$$\xi_2' = -\frac{\xi_2 \times \xi_1}{\tau} + \frac{\xi_3 \times \xi_2}{\varrho} \tag{70}$$

$$= -\frac{\xi_1}{\varrho} + \frac{\xi_3}{\tau}.$$

Die damit aufgestellten Beziehungen

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{ds} &= \quad * + \frac{\xi_2}{\varrho} \quad *, \\ \frac{d\xi_2}{ds} &= -\frac{\xi_1}{\varrho} \quad * + \frac{\xi_3}{\tau}, \\ \frac{d\xi_3}{ds} &= \quad * - \frac{\xi_2}{\tau} \quad * \end{aligned}} \tag{71}$$

stammen von *F. Frenet* (Toulouse 1847) und bilden die Grundlage der ganzen elementaren Differentialgeometrie der räumlichen Kurven, auf die sich alles zurückführen läßt.

Aus der ersten Formel können wir sofort die Kurven bestimmen, für die die Krümmung $1:\varrho$ identisch verschwindet. Man findet durch zwei Integrationen

$$\frac{d\xi_1}{ds} = 0, \qquad \frac{d\mathfrak{x}}{ds} = \xi_1 = \text{konst.},$$

$$\mathfrak{x} = \xi_1 s + \mathfrak{x}_0, \tag{72}$$

also die Geraden.

Aus dem Verschwinden der Windung folgt

$$\frac{d\xi_3}{ds} = 0, \qquad \xi_3 = \text{konst.} \tag{73}$$

Da ferner

$$\xi_3 \cdot \frac{d\mathfrak{x}}{ds} = 0$$

ist, erhält man durch nochmalige Integration

$$\xi_3 \cdot \mathfrak{x} = \text{konst.}, \tag{74}$$

d. h. die Kurve liegt in einer Ebene, denn (74) ist eine lineare Gleichung in x_1, x_2, x_3.

Wir hatten $\mathfrak{x}' = \xi_1$. Durch Ableitung folgt $\mathfrak{x}'' = \xi_1' = \xi_2 : \varrho$ und weiter

$$\mathfrak{x}''' = -\frac{\xi_1}{\varrho^2} - \frac{\varrho' \xi_2}{\varrho^2} + \frac{\xi_3}{\varrho \tau}. \tag{75}$$

Nimmt man für $\mathfrak{x}$ die Reihenentwicklung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0' s + \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}_0'' s^2 + \tfrac{1}{6}\mathfrak{x}_0''' s^3 + \dots \tag{76}$$

und setzt man für $\mathfrak{x}_0'$, $\mathfrak{x}_0''$, $\mathfrak{x}_0'''$ die gefundenen Werte ein, so folgt, wenn man die $(\xi_i)_{s=0}$ der Reihe nach mit den Koordinatenachsen zusammenfallen läßt, die sogenante *kanonische Darstellung* für unsre Kurve in der Umgebung von $s = 0$:

$$\begin{aligned} x_1 &= s \quad * \quad -\frac{1}{6\varrho_0^2} s^3 + \dots, \\ x_2 &= * + \frac{1}{2\varrho_0} s^2 - \frac{\varrho_0'}{6\varrho_0^2} s^3 + \dots, \\ x_3 &= * \quad * \quad + \frac{1}{6\varrho_0 \tau_0} s^3 + \dots \end{aligned} \tag{77}$$

Da die Reihen rechts beliebig fortgesetzt werden können, wenn man Krümmung und Windung in ihrer Abhängigkeit von der Bogenlänge s kennt, so folgt, daß hierdurch und durch die Festlegung der Anfangslage unsres „*begleitenden Dreibeins*“ ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Kurve eindeutig

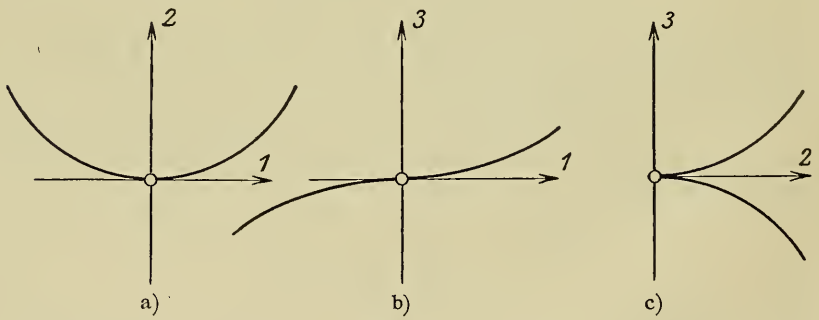


Fig. 2.

bestimmt ist. Außerdem kann man aus der kanonischen Entwicklung ablesen, wie die Normalrisse (senkrechten Projektionen) unsrer Kurve auf die $\xi_i \xi_k$-Ebenen im Ursprung aussehen. Man vergleiche die beigegebene Fig. 2.

§ 7. Über das Vorzeichen der Windung.

Es war (68)

$$\xi_3' = -\frac{\xi_2}{\tau},$$

also

$$\frac{1}{\tau} = -\xi_2 \xi_3'.$$

Wir wollen links die Ableitungen von $\mathfrak{x}$ einführen. Nach (59), (60) wird

$$\xi_2 = \varrho \mathfrak{x}'', \qquad \xi_3 = \varrho(\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}''),$$
$$\xi_3' = \varrho(\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}''') + \varrho'(\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}'').$$

Somit ist

$$\frac{1}{\tau} = -\xi_2 \xi_3' = \varrho^2 (\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}'''),$$

und wir haben zur Bestimmung von ϱ und τ aus $\mathfrak{x}(s)$ die Formeln

(78)
$$\boxed{\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\mathfrak{x}''^2}, \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{(\mathfrak{x}' \mathfrak{x}'' \mathfrak{x}''')}{\mathfrak{x}''^2}}.$$

Wir wollen die Formeln für Krümmung und Windung noch umrechnen für den Fall eines beliebigen Parameters t. Deuten die Punkte Ableitungen nach t, die Striche Ableitungen nach s an, so ist

$$\mathfrak{x}' = \frac{\dot{\mathfrak{x}}}{\sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2}},$$
$$\mathfrak{x}'' = \frac{\ddot{\mathfrak{x}}}{\dot{\mathfrak{x}}^2} - \frac{(\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}})\dot{\mathfrak{x}}}{(\dot{\mathfrak{x}}^2)^2},$$
$$\mathfrak{x}''' = \frac{\dddot{\mathfrak{x}}}{\sqrt{(\dot{\mathfrak{x}}^2)^3}} + \ldots,$$

wo die fehlenden Glieder sich aus $\ddot{\mathfrak{x}}$ und $\dot{\mathfrak{x}}$ linear zusammensetzen. Daraus ergibt sich:

(79)
$$\boxed{\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\dot{\mathfrak{x}}^2 \ddot{\mathfrak{x}}^2 - (\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}})^2}{(\dot{\mathfrak{x}}^2)^3} = \frac{(\dot{\mathfrak{x}} \times \ddot{\mathfrak{x}})^2}{(\dot{\mathfrak{x}}^2)^3}, \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{(\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}\dddot{\mathfrak{x}})}{(\dot{\mathfrak{x}} \times \ddot{\mathfrak{x}})^2}.}$$

Hieran ist besonders bemerkenswert, daß die Windung sich rational, ohne Ausziehen einer mehrwertigen Wurzel berechnen läßt, sobald nur $\dot{\mathfrak{x}} \times \ddot{\mathfrak{x}} \neq 0$. Ihr Vorzeichen hat also eine geometrische Bedeutung. Nehmen wir an, daß das zugrunde gelegte Achsenkreuz so aussieht, daß man Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand der Reihe nach gleichzeitig mit der x_1-, x_2-, x_3-Achse zur Deckung bringen kann (Figur 1), dann werden positiv und negativ gewundene Schrauben schematisch durch Fig. 3 auf S. 14 dargestellt.

In der Tat! Berechnen wir für unsre Schraube von § 1 (14) Krümmung und Windung, so erhalten wir:

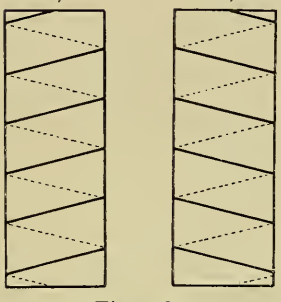
$$\dot{x}_1 = -a\sin t, \quad x_1 = -a\cos t, \quad \dddot{x}_1 = +a\sin t,$$
$$\dot{x}_2 = +a\cos t, \quad \ddot{x}_2 = -a\sin t, \quad x_2 = -a\cos t,$$
$$\dot{x}_3 = b, \quad \ddot{x}_3 = 0, \quad \dddot{x}_3 = 0,$$

und daraus

$$\dot{\mathfrak{x}}^2 = a^2 + b^2, \quad \ddot{\mathfrak{x}}^2 = a^2, \quad \dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}} = 0,$$
$$(\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}\dddot{\mathfrak{x}}) = a^2 b.$$

Somit nach (79):

$$\frac{1}{\varrho} = \pm\frac{a}{a^2+b^2},$$
$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$



Figur 3.

Die Windung ist also $>$ oder <0, je nachdem $b \gtrless 0$ ist, was den Fig. 3a und 3b entspricht. Entsprechend kann man sich die Bedeutung des Vorzeichens von $1:\tau$ für eine beliebige Kurve, etwa an der kanonischen Darstellung (77) deutlich machen.

Spiegelt man unsre Kurve an einer Ebene, indem man das Vorzeichen einer der Koordinaten x_i umkehrt, so ändert die Windung ihr Vorzeichen.

§ 8. Kinematische Deutung von Frenets Formeln.

Dreht man einen starren Körper um eine Achse um den Ursprung $\mathfrak{o}$ in der Zeit dt durch den Winkel $d\varphi$, so bezeichnet man $d\varphi:dt$ als die Winkelgeschwindigkeit der Drehung. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Punkt des Körpers, $\mathfrak{v} = d\mathfrak{p}:dt$ sein Geschwindigkeitsvektor. Ferner tragen wir auf der Drehachse den „*Drehvektor*“ $\mathfrak{d}$ so ab, daß seine Länge gleich $d\varphi:dt$ und sein Sinn so ausfällt, daß die Drehung um den Vektor nach links herum erfolgt. Dann schließt man aus der geometrischen Deutung des Vektorprodukts (§ 3) leicht auf das Bestehen der Gleichung

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{p}. \tag{80}$$

Denken wir uns jetzt an den Ursprung einen starren Körper angehängt, von dem drei Achsen parallel zu den Einheitsvektoren ξ_k einer Raumkurve verbleiben. Einen Punkt dieses Körpers können wir in der Form darstellen:

$$\mathfrak{p} = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3.$$

Sein Geschwindigkeitsvektor wird für $ds = dt$ nach den *Frenet*formeln

$$\mathfrak{v} = -\frac{u_2}{\varrho}\,\xi_1 + \left(\frac{u_1}{\varrho} - \frac{u_3}{\tau}\right)\xi_2 + \frac{u_2}{\tau}\,\xi_3 .$$

Daraus folgt nach (80)

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{\tau}\,\xi_1 + \frac{1}{\varrho}\,\xi_3 . \tag{81}$$

Wir finden also:

Die Komponenten des Drehvektors für das begleitende Dreibein einer Raumkurve sind: die Windung in der Tangentenrichtung und die Krümmung in der Binormalenrichtung.

Wenn man umgekehrt Krümmung und Windung durch die Formel (81) einführt, so ergeben sich rückwärts sofort die Formeln *Frenets*:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{ds} = \mathfrak{d} \times \xi_1 = +\dfrac{\xi_2}{\varrho}, \\ \dfrac{d\xi_2}{ds} = \mathfrak{d} \times \xi_2 = -\dfrac{\xi_1}{\varrho} + \dfrac{\xi_3}{\tau}, \\ \dfrac{d\xi_3}{ds} = \mathfrak{d} \times \xi_3 = -\dfrac{\xi_2}{\tau}. \end{cases} \tag{82}$$

Diese anschauliche Herleitung stammt von *G. Darboux*.

§ 9. Ebene Kurven, Vierscheitelsatz.

Bei ebenen Kurven kann man, wenn erst über den positiven Sinn der Zählung der Bogenlänge entschieden ist, der Krümmung ein bestimmtes Vorzeichen zuschreiben. Dazu kommt man folgendermaßen. Es sei $\mathfrak{x}(s)$ eine Kurve der Ebene $x_3 = 0$. Wir setzen

$$x_1' = \cos\tau, \qquad x_2' = \sin\tau, \qquad x_3' = 0 \tag{83}$$

und wählen als Hauptnormale den Einheitsvektor

$$\begin{cases} \varrho x_1'' = \cos\left(\tau + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\tau = -x_2', \\ \varrho x_2'' = \sin\left(\tau + \dfrac{\pi}{2}\right) = +\cos\tau = +x_1', \\ \varrho x_3'' = 0 . \end{cases} \tag{84}$$

Wir haben also, wenn wir die verschwindende x_3-Koordinate im folgenden weglassen, für die Ebene als Ersatz der *Frenet*formeln

$$\varrho x_1'' = -x_2', \qquad \varrho x_2'' = +x_1'. \tag{85}$$

Das Vorzeichen des dadurch eindeutig bestimmten ϱ kehrt sich um, wenn man das Vorzeichen von ds umkehrt.

Wir wollen von den Formeln (85) eine Anwendung machen und zum erstenmal einen Lehrsatz aus der *Differentialgeometrie „im großen"* beweisen. Es sei $\mathfrak{x}(s)$ eine geschlossene ebene Kurve, deren Tangentenbild ein einmal stets im gleichen Sinn umlaufener Kreis ist. Eine

solche Kurve, für die $1:\varrho$ etwa >0 sein soll, und die von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten wird, nennt man eine „*Eilinie*" oder „*Oval*". Ein Beispiel einer Eilinie ist die Ellipse. Ein Punkt der Kurve, in dem die Krümmung $\varkappa = 1:\varrho$ verschwindende Ableitung ($\varkappa' = 0$) hat, soll ein „*Scheitel*" genannt werden. Solche Punkte sind bei einer Ellipse die Achsenpunkte, und zwar sind diese vier Punkte, wie man leicht nachrechnet, die einzigen Scheitel einer (nicht kreisförmigen) Ellipse.

Es soll nun gezeigt werden:

(***Vierscheitelsatz.***) *Die Mindestzahl der Scheitel einer Eilinie ist vier.*

Dazu beweisen wir den Hilfssatz, daß das rings um die Eilinie erstreckte Integral

$$\oint (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2)\,\varkappa' \cdot ds = 0 \tag{86}$$

ist, wenn die a_i beliebige Konstante, $x_1(s)$, $x_2(s)$ die Koordinaten eines Punktes der Eilinie sind und $\varkappa(s)$ die zugehörige Krümmung bedeutet. Da die a_i beliebig sind, kommt man auf die drei Gleichungen

$$\oint \varkappa' ds = 0\,, \quad \oint x_1 \varkappa' ds = 0\,, \quad \oint x_2 \varkappa' ds = 0\,. \tag{87}$$

Die erste Gleichung folgt sofort aus der Geschlossenheit, die zweite und dritte bestätigt man durch Integration nach Teilen unter Beachtung von (85)

$$\oint x_1 \varkappa' ds = -\oint x_1' \varkappa ds = -\oint x_2'' ds = 0\,. \tag{88}$$

Setzen wir $\varkappa(s)$ als stetig voraus, so gibt es sicher zwei Stellen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ auf unsrer Eilinie, wo $\varkappa$ seinen größten und seinen kleinsten Wert annimmt. Diese sind jedenfalls Nullstellen von $\varkappa'$, und damit ist das Vorhandensein zweier Scheitel $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ gesichert. Angenommen, $\varkappa'$ wechsele zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ nirgends sein Zeichen, sei also auf dem einen Teilbogen $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ unsrer Eilinie immer $\geqq 0$ und auf dem andern stets $\leqq 0$. Es sei dann $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ die Gleichung der Verbindungsgeraden $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$, so daß der Ausdruck $(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2)\,\varkappa'$ beim Durchlaufen unsrer Eilinie niemals sein Zeichen ändert. Dann kann aber das Integral (86) nicht verschwinden. Die Annahme von nur zwei Zeichenwechseln von $\varkappa'$ auf unsrer Eilinie führt also zu einem Widerspruch mit unserm Hilfssatz. Da aber aus der Geschlossenheit der Eilinie hervorgeht, daß die Zeichenwechsel von $\varkappa'$, falls ihrer nur endlich viele vorhanden sind, jedenfalls in gerader Zahl auftreten, so ergibt sich das Vorhandensein von mindestens vier Scheiteln. Da wir in der Ellipse eine Eilinie mit tatsächlich vier Scheiteln vor uns haben, ist die Vier als Mindestzahl gesichert.

Den vorgetragenen Beweis des mehrfach bewiesenen Vierscheitelsatzes verdankt der Verfasser einer Mitteilung von *G. Herglotz*[2]).

---

[2]) Andere Beweise bei: *A. Kneser*, H. Weber-Festschrift, Leipzig u. Berlin 1912, S. 170—180; *W. Blaschke*, Rendiconti di Palermo **36** (1913), S. 220—222; *H. Mohrmann*, ebenda **37** (1914), S. 267—268.

§ 10. Krümmungsmittelpunkt.

Kehren wir zu räumlichen oder „gewundenen" Kurven zurück, halten wir aber die Voraussetzung $\mathfrak{x}'' \neq 0$ fest! Soll die Kugel mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{y}$ und dem Halbmesser a an der Stelle $s = s_0$ mit der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ drei zusammenfallende Punkte gemein haben, so muß die Reihenentwicklung

$$f(s) = (\mathfrak{x}(s) - \mathfrak{y})^2 - a^2 \tag{89}$$

nach Potenzen von $s - s_0$ mit den Gliedern dritter Ordnung beginnen, d. h. es muß für $s = s_0$

$$f(s) = 0\,, \qquad f'(s) = 0\,, \qquad f''(s) = 0$$

sein. Das gibt nach den *Frenet*formeln

$$\text{(90)} \quad \begin{cases} \text{a)} & (\mathfrak{x} - \mathfrak{y})^2 = a^2\,, \\ \text{b)} & (\mathfrak{x} - \mathfrak{y})\,\mathfrak{x}_1 = 0\,, \\ \text{c)} & (\mathfrak{x} - \mathfrak{y})\,\dfrac{\mathfrak{x}_2}{\varrho} + 1 = 0\,. \end{cases}$$

Nach (90b) liegt der Mittelpunkt $\mathfrak{y}$ in der Normalebene, nach (90c) oder $(\mathfrak{y} - \mathfrak{x})\,\mathfrak{x}_2 = \varrho$ hat der Normalriß von $\mathfrak{y}$ auf die Hauptnormale die Entfernung ϱ vom Ursprung. Setzen wir also von $\mathfrak{y}$ voraus, daß es in der Schmiegebene liegt, so haben wir:

$$\boxed{\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \varrho\,\mathfrak{x}_2}\,. \tag{91}$$

Wir wollen den Punkt $\mathfrak{y}$ in der Schmiegebene, den Mittelpunkt der Kugel „durch drei benachbarte" Kurvenpunkte von $\mathfrak{x}(s)$ den *Krümmungsmittelpunkt* nennen. Damit ist eine geometrische Deutung für den „*Krümmungshalbmesser*" ϱ, den reziproken Wert der Krümmung gefunden. Da $\mathfrak{y} - \mathfrak{x} = \varrho\,\mathfrak{x}_2$ ist, weist der Hauptnormalenvektor $\mathfrak{x}_2$ von $\mathfrak{x}$ nach dem Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{y}$ oder in entgegengesetzter Richtung, je nachdem $\varrho > 0$ oder $\varrho < 0$ gewählt ist.

Die Schnittgerade der Ebenen (90b) und (90c), d. h. mit andern Worten den Durchschnitt „benachbarter" Normalebenen pflegt man als „*Krümmungsachse*" der Kurve zu bezeichnen. Sie steht im Krümmungsmittelpunkt auf der Schmiegebene senkrecht.

§ 11. Schmiegkugel.

Wir wollen jetzt durch vier benachbarte Punkte von $\mathfrak{x}(s)$ eine Kugel legen, $\mathfrak{z}$ sei ihr Mittelpunkt, R ihr Halbmesser. Dann muß

$$g(s) = (\mathfrak{x} - \mathfrak{z})^2 - R^2 \tag{92}$$

gleichzeitig mit den Ableitungen bis zur dritten Ordnung Null sein.

Das gibt neben den schon unter etwas anderer Bezeichnung berechneten Formeln (90) noch eine neue

$$(93)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{x}-\mathfrak{z})\,\xi_1 = 0 \\ (\mathfrak{x}-\mathfrak{z})\,\dfrac{\xi_2}{\varrho}+1=0 \\ (\mathfrak{x}-\mathfrak{z})\,\dfrac{1}{\varrho}\left(\dfrac{\xi_3}{\tau}-\dfrac{\xi_1}{\varrho}\right)-(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})\,\varrho'\dfrac{\xi_2}{\varrho^2}=0. \end{cases}$$

Setzt man zufolge der beiden ersten dieser Gleichungen

$$(94)\qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \varrho\,\xi_2 + \sigma\,\xi_3,$$

so folgt aus der dritten, wenn $1:\tau \neq 0$,

$$\sigma = \tau\varrho'.$$

Somit ist der Mittelpunkt der „*Schmiegkugel*“

$$(95)\qquad \boxed{\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \varrho\,\xi_2 + \varrho'\tau\,\xi_3}$$

und ihr Halbmesser

$$(96)\qquad R^2 = \varrho^2 + \varrho'^2\tau^2.$$

Der Mittelpunkt $\mathfrak{z}$ der Schmiegkugel liegt nach (95) auf der Krümmungsachse.

Durch Ableitung von (95) erhält man nach den *Frenet*formeln

$$(97)\qquad \mathfrak{z}' = \left\{\frac{\varrho}{\tau} + (\varrho'\tau)'\right\}\xi_3.$$

Für eine unebene Kurve auf einer festen Kugel ist also

$$(98)\qquad \frac{\varrho}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\tau\,\frac{d\varrho}{ds}\right) = 0.$$

Nehmen wir umgekehrt an, diese Differentialgleichung zwischen den Funktionen $\varrho(s)$, $\tau(s)$ sei identisch erfüllt, dann ist $\mathfrak{z}' = 0$, also $\mathfrak{z} =$ konst. und nach (96)

$$\frac{dR^2}{ds} = 2\,\varrho'\tau\left\{\frac{\varrho}{\tau} + \frac{d}{ds}(\varrho'\tau)\right\} = 0$$

oder $R =$ konst. Das heißt, die Beziehung (98) ist für die unebenen sphärischen Kurven kennzeichnend.

Nehmen wir einmal eine Kurve mit fester Krümmung ($\varrho' = 0$)! Dann fällt der Mittelpunkt (95) der Schmiegkugel in den Krümmungsmittelpunkt (91)

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \varrho\,\xi_2 = \mathfrak{x}^*.$$

Man findet

$$(99)\qquad \frac{d\mathfrak{x}^*}{ds} = \frac{\varrho}{\tau}\,\xi_3, \qquad \frac{ds^*}{ds} = \pm\frac{\varrho}{\tau}$$

und somit

$$(100)\qquad \frac{d\mathfrak{x}^*}{ds^*} = \xi_1^* = \pm\,\xi_3.$$

Ferner durch Ableitung von (100) nach s

$$\frac{d\xi_1^*}{ds} = \frac{\xi_2^*}{\varrho^*}\left(\pm\frac{\varrho}{\tau}\right) = \mp\frac{\xi_2}{\tau}$$

oder

$$\frac{\xi_2^*}{\varrho^*} = -\frac{\xi_2}{\varrho}. \tag{101}$$

Bildet man das „innere Quadrat", so folgt

$$\varrho^{*2} = \varrho^2 = \text{konst.} \tag{102}$$

Ferner ist

$$\mathfrak{y}^* = \mathfrak{z}^* = \mathfrak{x}^* + \varrho^*\xi_2^* = \mathfrak{x}^* - \varrho\xi_2 = \mathfrak{x}. \tag{103}$$

Die Kurven $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{x}^*)$ haben also beide die gleiche feste Krümmung und jede ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte für die andere.

Die Formeln (93) lassen noch eine andere Deutung zu. Die erste ist bei veränderlichem $\mathfrak{z}$ die Gleichung der Normalebene unsrer Kurve $\mathfrak{x}(s)$. Die beiden ersten Gleichungen zusammen ergeben daher als Schnitt benachbarter Normalebenen die Krümmungsachse, auf der $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ liegen. Nimmt man noch die dritte hinzu, so erkennt man, daß $\mathfrak{z}$ Schnittpunkt dreier benachbarter Normalebenen ist.

§ 12. Bertrandkurven.

In den Kurvenpaaren mit fester Krümmung, die im letzten Paragraphen betrachtet wurden, haben wir ein Beispiel eines Kurvenpaares mit gemeinsamen Hauptnormalen. Alle derartigen Paare hat zuerst *J. Bertrand*[3]) ermittelt, und zwar auf folgende Weise.

Es sei $\mathfrak{x}(s)$ die eine Kurve des Paares,

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} + a\xi_2 \tag{104}$$

die zweite. Durch Ableitung mit Benutzung der *Frenet*formeln folgt

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds} = \left(1 - \frac{a}{\varrho}\right)\xi_1 + a'\xi_2 + \frac{a}{\tau}\xi_3. \tag{105}$$

Da dieser Tangentenvektor auf ξ_2 senkrecht stehen soll, muß jedenfalls $a' = 0$, also a konstant sein. Bezeichnen wir den Winkel zwischen ξ_1 und dem Einheitsvektor ξ_1^* in der Tangente an $(\mathfrak{x}^*)$ mit ω, so ist

$$\xi_1^* = \xi_1\cos\omega + \xi_3\sin\omega. \tag{106}$$

Daraus folgt durch Ableitung

$$\frac{d\xi_1^*}{ds^*}\cdot\frac{ds^*}{ds} = \frac{\xi_2^*}{\varrho^*}\cdot\frac{ds^*}{ds} = \xi_2\left(\frac{\cos\omega}{\varrho} - \frac{\sin\omega}{\tau}\right) + \xi_1\frac{d\cos\omega}{ds} + \xi_3\frac{d\sin\omega}{ds}. \tag{107}$$

Sollen also die Hauptnormalen ξ_2 und ξ_2^* zusammenfallen, so muß

[3]) *J. Bertrand*, Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure, Paris, Comptes Rendus **36** (1850), und Liouvilles Journal (1) **15** (1850), S. 332—350.

$\omega =$ konst. sein. Da die Vektoren ξ_1^* und $d\mathfrak{x}^* : ds$ gleichgerichtet sind, folgt aus (105) und (106)

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{a}{\varrho} & \frac{a}{\tau} \\ \cos\omega & \sin\omega \end{vmatrix} = 0, \tag{108}$$

also eine lineare Gleichung zwischen Krümmung und Windung:

$$\frac{a\sin\omega}{\varrho} + \frac{a\cos\omega}{\tau} = \sin\omega. \tag{109}$$

Für $\omega = \pi/2$ kommen wir auf den im vorigen Paragraphen behandelten Fall der Kurven mit fester Krümmung zurück. Schließen wir den trivialen Fall ebener Kurven, der für $\sin\omega = 0$ eintritt, aus, so können wir für

$$a\operatorname{cotg}\omega = b$$

setzen und (109) in der Form schreiben

$$\frac{a}{\varrho} + \frac{b}{\tau} = 1. \tag{110}$$

Eine solche Beziehung muß also für jede Kurve eines *Bertrand*paares erfüllt sein. Wenn man die Schlußweise umgekehrt durchgeht, erkennt man die Bedingung (110) auch als hinreichend. Für eine Schraubenlinie ($\varrho, \tau =$ konst.) gibt es unendlich viele Beziehungen (110) und entsprechend unendlich viele Schraubenlinien, die die erste zu einem *Bertrand*paar ergänzen.

§ 13. Natürliche Gleichungen.

Es handelt sich darum, ob durch Angabe der Funktionen $\varrho = \varrho(s)$, $\tau = \tau(s)$ eine Kurve im Raum, abgesehen von Bewegungen, eindeutig bestimmt werden kann. Für den Fall analytischer Kurven war das schon in § 6 (77) mittels der kanonischen Darstellung festgestellt worden. Macht man nur Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, so kann man den Eindeutigkeitssatz folgendermaßen herleiten.

Nach *Frenet* genügen die Koordinaten ξ_{ik} der Vektoren ξ_i des begleitenden Dreibeins den linearen, homogenen Differentialgleichungen mit schiefsymmetrischer Determinante

$$\frac{d\xi_{1k}}{ds} = \frac{\xi_{2k}}{\varrho}, \qquad \frac{d\xi_{2k}}{ds} = -\frac{\xi_{1k}}{\varrho} + \frac{\xi_{3k}}{\tau}, \qquad \frac{d\xi_{3k}}{ds} = -\frac{\xi_{2k}}{\tau}. \tag{111}$$

Angenommen, wir hätten außer der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ noch eine zweite $\bar{\mathfrak{x}}(s)$, deren $\bar{\xi}_{ik}$ denselben Gleichungen (111) genügen. Dann folgt aus der schiefen Symmetrie der *Frenet*formeln, daß

$$\frac{d}{ds}(\xi_{1k}\bar{\xi}_{1k} + \xi_{2k}\bar{\xi}_{2k} + \xi_{3k}\bar{\xi}_{3k}) = 0 \tag{112}$$

ist. Bewegen wir nun die Kurve $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ so lange, bis das zur Stelle $s = 0$

gehörige Dreibein mit dem entsprechenden Dreibein zu $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ zusammenfällt, so ist für $s = 0$

$$\xi_{1k}\bar{\xi}_{1k} + \xi_{2k}\bar{\xi}_{2k} + \xi_{3k}\bar{\xi}_{3k} = 1 \tag{113}$$

und somit gilt diese Formel wegen (112) für jedes s. Also fallen die Einheitsvektoren mit den Koordinaten ξ_{ik}, $\bar{\xi}_{ik}$, $i = 1, 2, 3$ für jedes s zusammen: $\xi_{ik} = \bar{\xi}_{ik}$. Insbesondere folgt für $i = 1$

$$\xi_1 - \bar{\xi}_1 = \frac{d}{ds}(\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}) = 0, \tag{114}$$

also, da für $s = 0$ nach unsrer Annahme $\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}} = 0$ ist, allgemein

$$\mathfrak{x}(s) = \bar{\mathfrak{x}}(s), \tag{115}$$

w. z. b. w.

Es bleibt noch festzustellen, ob man die Funktionen $\varrho(s)$ und $\tau(s)$ beliebig vorgeben kann. Schreibt man in (111) an Stelle von ξ_{ik} kurz u_i, so hat man das System linearer, homogener Differentialgleichungen zu lösen:

$$\frac{du_1}{ds} = \frac{u_2}{\varrho}, \quad \frac{du_2}{ds} = -\frac{u_1}{\varrho} + \frac{u_3}{\tau}, \quad \frac{du_3}{ds} = -\frac{u_2}{\tau}. \tag{116}$$

Sind die Funktionen $1:\varrho(s)$, $1:\tau(s)$ stetig in einem Intervall um $s = 0$, so haben diese Differentialgleichungen nach bekannten Existenzsätzen (vgl. den folgenden § 14) bei beliebig vorgegebenen Anfangswerten ein Lösungssystem. Wir wollen drei derartige Lösungssysteme ermitteln:

$$(\xi_{11}, \xi_{21}, \xi_{31}); \quad (\xi_{12}, \xi_{22}, \xi_{32}); \quad (\xi_{13}, \xi_{23}, \xi_{33})$$

mit den Anfangswerten

$$(1, 0, 0); \quad (0, 1, 0); \quad (0, 0, 1).$$

Da, wie wir schon im besonderen Fall $(i = k)$ bemerkt haben,

$$\frac{d}{ds}\sum_r \xi_{ri}\xi_{rk} = 0 \tag{117}$$

ist wegen der schiefen Symmetrie der Matrix (111), so erfüllen die ξ_{ik} nicht nur für $s = 0$, sondern für jedes s die Bedingungen einer orthogonalen Matrix

$$\sum_r \xi_{ri}\xi_{rk} = \delta_{ik} \begin{cases} = 0, & \text{für } i \neq k, \\ = 1, & \text{für } i = k. \end{cases} \tag{118}$$

Setzen wir nun

$$\frac{dx_i}{ds} = \xi_{1i}, \qquad x_i = \int_0^s \xi_{1i}(s)\,ds, \tag{119}$$

so haben wir eine Kurve gefunden, deren Krümmung und Windung die vorgeschiebenen Werte $1:\varrho(s)$, $1:\tau(s)$ haben.

Durch Angabe der stetigen Funktionen $1:\varrho(s)$ und $1:\tau(s)$ ist also eine Kurve, und zwar wie vorhin bewiesen wurde, abgesehen von Bewegungen *eindeutig* bestimmt. Man nennt deshalb die Formeln:

$$\varrho = \varrho(s), \qquad \tau = \tau(s) \tag{120}$$

die „natürlichen Gleichungen" einer Kurve. „Natürlich", weil sie von der Koordinatenwahl unabhängig sind. Unwesentlich ist es, wenn in diesen Gleichungen s durch $\pm s +$ konst. ersetzt wird.

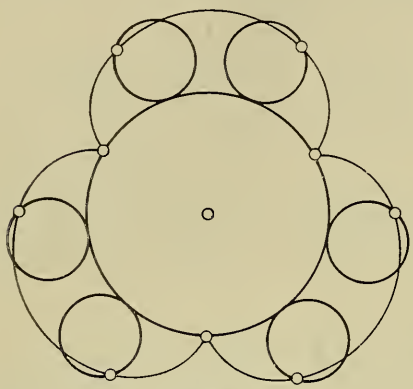


Fig. 4.

Berechnen wir als Beispiel die natürlichen Gleichungen einer *„Epizykloide"*, die von einem Umfangspunkt eines rollenden Kreises beschrieben wird, der auf einem festen Kreis seiner Ebene außen gleitungslos abrollt. Es seien a und λa die Halbmesser des festen und des rollenden Kreises. Dann findet sich für die Kurve (Fig. 4) die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x_1 &= a\{(1+\lambda)\cos\lambda\varphi - \lambda\cos(\lambda+1)\varphi\}, \\ x_2 &= a\{(1+\lambda)\sin\lambda\varphi - \lambda\sin(\lambda+1)\varphi\}. \end{aligned} \tag{121}$$

Man findet nach geeigneter Wahl einer Integrationskonstanten

$$s = 4\lambda(1+\lambda)a\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad \varrho = \frac{4\lambda(1+\lambda)}{1+2\lambda}a\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{122}$$

Somit ergeben sich *die natürlichen Gleichungen der Epizykloide*

$$s^2 + (1+2\lambda)^2\varrho^2 = \{4\lambda(1+\lambda)a\}^2, \qquad \cdot\frac{1}{\tau} = 0. \tag{123}$$

Es ist bemerkenswert, daß bei der im allgemeinen transzendenten Kurve die Beziehung zwischen s und ϱ stets algebraisch ist.

§ 14. Hilfssatz über lineare Differentialgleichungen.

Im vorigen Paragraphen wurde benutzt, daß ein System von Gleichungen

$$\frac{du_i}{ds} = \sum_{k=1}^{3} c_{ik}u_k; \qquad i = 1, 2, 3, \tag{124}$$

wenn die $c_{ik}(s)$ in $0 \leqq s \leqq r$ stetig sind, ebenda stetige Lösungen besitzen, die vorgeschriebene Anfangswerte u_i^0 annehmen. Den Nach-

weis erbringt man am einfachsten mittels „schrittweiser Näherungen". Man setze

$$u_i^1 = u_i^0 + \int_0^s \sum_k c_{ik} u_k^0 \, ds, \tag{125}$$

$$u_i^2 = u_i^0 + \int_0^s \sum_k c_{ik} u_k^1 \, ds,$$

. . . . . .

$$u_i^n = u_i^0 + \int_0^s \sum_k c_{ik} u_k^{n-1} \, ds.$$

Es sei $|c_{ik}| < \frac{1}{3} C$, $|u_i^0| \leqq 1$. Dann wird

$$|u_i^1 - u_i^0| < Cs,$$

$$u_i^2 - u_i^1 = \int_0^s \sum_k c_{ik} (u_k^1 - u_k^0) \, ds,$$

$$|u_i^2 - u_i^1| < C^2 \frac{s^2}{2},$$

$$|u_i^n - u_i^{n-1}| < C^n \frac{s^n}{n!} \leqq C^n \frac{r^n}{n!}.$$

Somit ist die Funktionenfolge $u_i^n(s)$ gleichmäßig konvergent

$$\lim u_i^n(s) = u_i(s). \tag{126}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz folgt aus (126) für $n \to \infty$

$$u_i = u_i^0 + \int_0^s \sum c_{ik} u_k \, ds \tag{127}$$

oder

$$\frac{du_i}{ds} = \sum c_{ik} u_k, \quad u_i(0) = u_i^0, \tag{128}$$

w. z. b. w.

§ 15. Böschungslinien.

Kurven, deren Tangenten mit einer festen Richtung einen festen Winkel bilden, nennt man nach *E. Müller* Böschungslinien. Beispiele dafür sind die ebenen Kurven und die Schrauben (§ 1). Das Tangentenbild einer Böschungslinie ist ein Kreis. Nennen wir den Einheitsvektor in der festen Richtung $\mathfrak{e}$ und den festen Winkel ϑ, so ist

$$\mathfrak{e}\,\xi_1 = \cos\vartheta \tag{129}$$

und durch Ableitung

$$\mathfrak{e}\,\xi_2 = 0. \tag{130}$$

$\mathfrak{e}$ liegt somit in der Ebene ξ_1, ξ_3. So können wir

$$\mathfrak{e}\,\xi_3 = \sin\vartheta \tag{131}$$

setzen. Durch Ableitung von (130) folgt nach *Frenet* und wegen (129), (131)

$$\frac{\sin\vartheta}{\tau} - \frac{\cos\vartheta}{\varrho} = 0 \quad \text{oder} \quad \tau = \varrho \operatorname{tg}\vartheta , \tag{132}$$

d. h. *bei einer Böschungslinie stehen Krümmung und Windung in festem Verhältnis.*

Ist umgekehrt (132) erfüllt, so ist

$$\frac{d}{ds}(\xi_1 \cos\vartheta + \xi_3 \sin\vartheta) = 0 , \tag{133}$$

also die Richtung

$$\mathfrak{e} = \xi_1 \cos\vartheta + \xi_3 \sin\vartheta \tag{134}$$

und der Winkel

$$\mathfrak{e}\,\xi_1 = \cos\vartheta \tag{135}$$

unveränderlich, unsere Kurve also eine Böschungslinie.

Wir wollen uns die Böschungslinie auf eine Ebene senkrecht zu $\mathfrak{e}$ projizieren. Der Normalriß sei $\bar{\mathfrak{x}}(s)$:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - (\mathfrak{x}\,\mathfrak{e})\,\mathfrak{e} . \tag{136}$$

Daraus folgt nach (129)

$$\bar{\mathfrak{x}}' = \xi_1 - \mathfrak{e}\cos\vartheta , \tag{137}$$

$$\bar{\mathfrak{x}}'' = \frac{\xi_2}{\varrho} . \tag{138}$$

Ferner

$$\bar{\mathfrak{x}}'^2 = \sin^2\vartheta , \qquad \frac{d\bar{s}}{ds} = \sin\vartheta , \qquad \bar{s} = s\sin\vartheta . \tag{139}$$

Somit ist

$$\frac{d^2\bar{\mathfrak{x}}}{d\bar{s}^2} = \bar{\mathfrak{x}}'' \cdot \left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 = \frac{\xi_2}{\varrho\sin^2\vartheta} = \frac{\bar{\xi}_2}{\bar{\varrho}} . \tag{140}$$

Man kann also setzen

$$\bar{\xi}_2 = \xi_2 \quad \text{und} \quad \bar{\varrho} = \varrho\sin^2\vartheta . \tag{141}$$

§ 16. Böschungslinien auf einer Kugel.

Soll man auf einer Kugel vom Halbmesser R die unebenen Böschungslinien ermitteln, so kann man zunächst die Formel (96) von § 11 heranziehen. Nämlich

$$\varrho^2 + \varrho'^2\tau^2 = R^2 .$$

Nach (132) ist $\tau = \varrho \operatorname{tg}\vartheta$, also

$$\varrho^2(1 + \varrho'^2 \operatorname{tg}^2\vartheta) = R^2 ,$$

$$\varrho' \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sqrt{R^2 - \varrho^2}}{\varrho} ,$$

$$\frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} \operatorname{tg}\vartheta = ds$$

und daraus nach geeigneter Wahl des Kurvenpunktes $s = 0$

(142) $s = \operatorname{tg}\vartheta\sqrt{R^2 - \varrho^2}$

oder

(143) $\varrho = \sqrt{R^2 - s^2\operatorname{ctg}^2\vartheta}$.

Für den Normalriß (§ 15) unserer Böschungslinie folgt nach (139) und (141)

(144) $\bar{\varrho} = \sqrt{R^2\sin^4\vartheta - \bar{s}^2\cos^2\vartheta}$.

Nach § 13 (123) sind diese Normalrisse also Epizykloiden. In der Fig. 5 wird dieser Zusammenhang zwischen sphärischen Böschungslinien und ebenen Radlinien in Auf- und Grundriß verdeutlicht. Der Grundriß ist dabei doppelt zu durchlaufen.

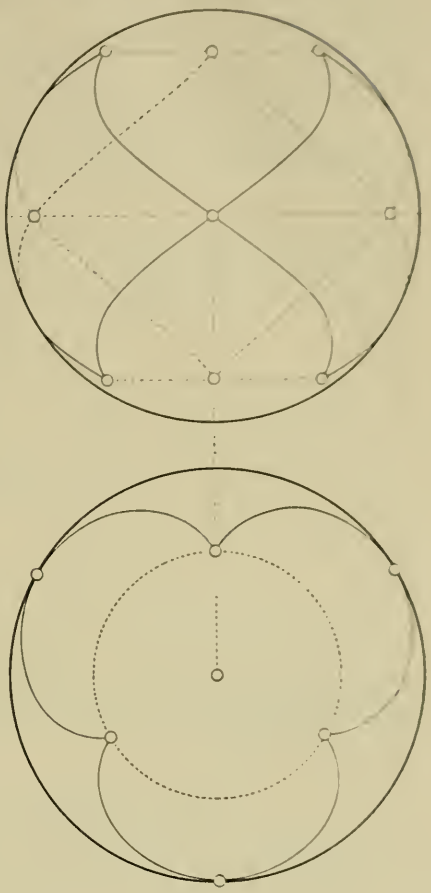


Fig. 5.

Wir wollen von den Böschungslinien einer Kugel folgenden Satz erwähnen:

Denkt man sich mit dem begleitenden Dreibein einer unebenen Böschungslinie auf einer Kugel eine Ebene fest verbunden, die zur Richtung $\mathfrak{e}$ weder parallel noch senkrecht ist, so umhüllt diese Ebene, wenn das Dreibein längs seiner Kurve vorwärtsgleitet, ebenfalls eine Böschungslinie, die auf einem Drehellipsoid liegt, dessen Achse zu $\mathfrak{e}$ parallel ist und durch den Mittelpunkt unserer Kugel hindurchgeht[4]).

§ 17. Böschungslinien auf einem Drehparaboloid.

Als Normalriß der Böschungslinien auf einem Drehparaboloid, dessen Achse parallel zur festen Richtung $\mathfrak{e}$ ist, auf eine Ebene senkrecht zu $\mathfrak{e}$ erhält man *Kreisevolventen*, ebene Kurven also, die ihre Krümmungsmittelpunkte auf einem Kreise haben.

---

[4]) Vgl. *W. Blaschke*, Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien. Monatshefte für Mathematik und Physik **19** (1908), S. 188—204, bes. S. 198.

Man kann das aus den Ergebnissen des letzten Abschnitts folgern, wenn man den Raum in Richtung $\mathfrak{e}$ streckt und durch Grenzübergang aus dem Ellipsoid, das aus der Kugel entstanden ist, ein Paraboloid herleitet. Aber man kann die Behauptung auch unabhängig davon, und zwar ohne jede Rechnung bestätigen.

Es habe unser Vektor $\mathfrak{e}$ die Koordinaten 0, 0, 1, liege also auf der x_3-Achse. Die Gleichung des Paraboloids sei:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2cx_3 . \tag{145}$$

Eine Schmiegebene unsrer Böschungslinie schließt mit x_3 nach (129) und (130) den Winkel ϑ ein, ihre Gleichung kann also, wenn wir sie um x_3 noch geeignet drehen, auf die Form

$$x_3 = x_1 \operatorname{ctg} \vartheta + \text{konst.} \tag{146}$$

gebracht werden. Ihr Durchschnitt mit dem Paraboloid ist eine Ellipse, die mit unserer Böschungslinie drei benachbarte Punkte gemein hat. Der „Grundriß" dieser Ellipse auf $x_3 = 0$ ist eine neue Ellipse, die mit dem Grundriß der Böschungslinie wieder drei benachbarte Punkte gemein hat. Man findet ihre Gleichung durch Eliminieren von x_3 aus (145) und (146), nämlich:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2c x_1 \operatorname{ctg} \vartheta + \text{konst.} \tag{147}$$

Das ist aber offenbar ein Kreis, also der Krümmungskreis des Grundrisses der Böschungslinie. Sein Mittelpunkt hat von der Drehachse (vom Ursprung) die feste Entfernung $c \operatorname{ctg} \vartheta$. Somit ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte des Grundrisses unserer Böschungslinie tatsächlich ein Kreis.

§ 18. Evoluten, Evolventen.

Die Kurven auf der Tangentenfläche einer Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$, die die Tangenten senkrecht durchschneiden, nennt man *Fadenevolventen*. Setzt man

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} - r\xi_1 , \tag{148}$$

so folgt

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds} = (1 - r')\,\xi_1 - r\frac{\xi_2}{\varrho} . \tag{149}$$

Also muß sein

$$\xi_1 \frac{d\mathfrak{x}^*}{ds} = 1 - r' = 0 . \tag{150}$$

Daraus folgt $r = s + \text{konst}$. Somit haben wir die gesuchten Evolventen in der Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}(s) - (s + \text{konst.})\frac{d\mathfrak{x}(s)}{ds} . \tag{151}$$

Anziehender ist die umgekehrte Aufgabe: zu $(\mathfrak{x}^*)$ rückwärts eine „*Evolute*" $(\mathfrak{x})$ aufzusuchen. Vertauscht man die Bezeichnungen $\mathfrak{x}^*$

und $\mathfrak{x}$, so handelt es sich darum, Normalen von $(\mathfrak{x})$ so anzuordnen daß sie Tangenten einer Kurve $(\mathfrak{x}^*)$ werden. Setzen wir entsprechend

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} + u_2 \mathfrak{x}_2 + u_3 \mathfrak{x}_3 , \tag{152}$$

so wird

$$\frac{d\mathfrak{x}^*}{ds} = \left(1 - \frac{u_2}{\varrho}\right) \mathfrak{x}_1 + \left(u_2' - \frac{u_3}{\tau}\right) \mathfrak{x}_2 + \left(u_3' + \frac{u_2}{\tau}\right) \mathfrak{x}_3 . \tag{153}$$

Sollen die Vektoren $\mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{x}^* : ds$ linear abhängen, so muß zunächst

$$u_2 = \varrho \tag{154}$$

sein, d. h. die zum Punkt $\mathfrak{x}$ gehörigen Evolutenpunkte $\mathfrak{x}^*$ liegen auf der Krümmungsachse (§ 10) von $\mathfrak{x}$. Ferner muß sein

$$\begin{vmatrix} \varrho' - \frac{u_3}{\tau} & u_3' + \frac{\varrho}{\tau} \\ \varrho & u_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{155}$$

oder

$$\frac{\varrho' u_3 - u_3' \varrho}{\varrho^2 + u_3^2} = \frac{1}{\tau} . \tag{156}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{arctg} \frac{\varrho}{u_3} = \operatorname{arctg} \frac{u_2}{u_3} = \int \frac{ds}{\tau} . \tag{157}$$

Somit ist

$$u_3 = \varrho \operatorname{ctg} \int \frac{ds}{\tau} . \tag{158}$$

Entsprechend der hier auftretenden Integrationskonstanten hängen die Evoluten

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} + \varrho \left\{ \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3 \left(\operatorname{ctg} \int \frac{ds}{\tau} + c \right) \right\} \tag{159}$$

noch von einer Konstanten ab. *Der Winkel, unter dem man zwei verschiedene Evoluten von $\mathfrak{x}$ aus sieht, ist unveränderlich.* Insbesondere gilt für ebene Kurven

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} + \varrho \mathfrak{x}_2 + c \varrho \mathfrak{x}_3 . \tag{160}$$

Es gibt also eine einzige ebene Evolute ($c = 0$) einer ebenen Kurve. Die übrigen sind Böschungslinien, deren Tangenten gegen die Ebene von $(\mathfrak{x})$ feste Neigung haben.

§ 19. Isotrope Kurven.

Es ist, selbst wenn man nur geometrisch anschauliche Ergebnisse herleiten will, doch zweckmäßig, gelegentlich auch imaginäre Kurven zu betrachten, also die Funktionen $x_k(t)$ als komplexe analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen $t = u + iv$ mit gemeinsamem Existenzgebiet vorauszusetzen. Für diese imaginären Kurven, die, wenn wir „reelle Dimensionen" zählen, Träger von zweifach un-

endlich vielen Punkten sind, da die Kurvenpunkte von zwei reellen Parametern u, v abhängen, ist die hier vorgetragene Theorie im großen und ganzen anwendbar; nur treten gewisse Ausnahmefälle auf. So ist besonders der Fall möglich, daß die Bogenlänge einer solchen Kurve Null ist, ohne daß sich die Kurve auf einen Punkt zusammenzieht. Aus

$$\mathfrak{x}'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0 \tag{161}$$

folgt nämlich jetzt nicht mehr $\mathfrak{x}' = 0$. Die durch $\mathfrak{x}'^2 = 0$, $\mathfrak{x}' \neq 0$ gekennzeichneten imaginären Kurven pflegt man *isotrope Kurven* zu nennen (oder auch „Minimalkurven"). Wir werden später sehen, daß diese unanschaulichen imaginären Kurven zur Herleitung einer sehr anschaulichen reellen Flächenklasse verwendbar sind, nämlich zur Herleitung der „Minimalflächen", in die sich ein Seifenhäutchen formt, das längs eines geschlossenen Drahtes ausgespannt ist.

Aus $\mathfrak{x}'^2 = 0$ folgt $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'' = 0$, $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''' = -\mathfrak{x}''^2$ und daher nach dem Multiplikationssatz (§ 3, (41))

$$(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''')^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\mathfrak{x}''^2 \\ 0 & \mathfrak{x}''^2 & * \\ -\mathfrak{x}''^2 & * & * \end{vmatrix} = -(\mathfrak{x}''^2)^3. \tag{162}$$

Ebenso gilt allgemeiner identisch für den beliebigen Vektor $\mathfrak{v}$

$$(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{v})^2 = -\mathfrak{x}''^2 \cdot (\mathfrak{x}'\mathfrak{v})^2. \tag{163}$$

Daraus folgt, daß $(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''')$ oder, was wegen (162) dasselbe ist, $\mathfrak{x}''^2$ nur dann identisch verschwinden kann, wenn $\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}'' = 0$ ist. Dadurch waren aber nach § 3 die geraden Linien gekennzeichnet. Wir wollen im folgenden diese geradlinigen, isotropen Linien, also die isotropen Geraden ausschließen ($\mathfrak{x}''^2 \neq 0$). Bei Einführung eines neuen Parameters p auf unsrer Kurve ergibt sich

$$\frac{(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{v})_p}{(\mathfrak{x}'\mathfrak{v})_p}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = \frac{(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{v})_t}{(\mathfrak{x}'\mathfrak{v})_t}. \tag{164}$$

Wollen wir also den neuen Parameter p so wählen, daß

$$(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{v})_p = -(\mathfrak{x}'\mathfrak{v})_p \tag{165}$$

wird, so brauchen wir nur

$$p = \int \sqrt{-\frac{(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{v})_t}{(\mathfrak{x}'\mathfrak{v})_t}}\, dt \tag{166}$$

zu setzen, wo $\mathfrak{v}$ einen beliebigen konstanten Vektor bedeutet. Dadurch ist dieser natürliche Parameter p, der zuerst von *E. Vessiot* und dann insbesondere von *E. Study* eingeführt worden ist[5]), ähnlich wie früher die Bogenlänge durch eine (zweiwertige) Quadratwurzel erklärt.

---

[5]) *E. Vessiot*, Comptes Rendus Paris **140** (1905), S. 1381—1384; *E. Study*, Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven, Transactions of the American Mathematical Society **10** (1909), S. 1—49. In dieser Arbeit werden die imaginären Kurven systematisch studiert.

Für $t = p$ wird nach (165)

(167) $$\mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}'' = -\mathfrak{x}'$$

und nach (163)

(168) $$\mathfrak{x}''^2 = -1.$$

Ferner ist nach (167)

(169) $$(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''') = -\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''' = \mathfrak{x}''^2 = -1.$$

Wir wollen zeigen, daß sich die Krümmung des Normalrisses unsrer isotropen Kurve auf eine Ebene berechnen läßt, wenn der Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ der Normalen auf diese Ebene gegeben ist. Geht die Ebene etwa durch den Ursprung, so gilt für den Normalriß $\mathfrak{y}$ eines Kurvenpunktes $\mathfrak{x}$

(170) $$\begin{cases} \mathfrak{y} = \mathfrak{x} - (\mathfrak{e}\mathfrak{x})\mathfrak{e}, \\ \mathfrak{y}' = \mathfrak{x}' - (\mathfrak{e}\mathfrak{x}')\mathfrak{e}, \\ \mathfrak{y}'' = \mathfrak{x}'' - (\mathfrak{e}\mathfrak{x}'')\mathfrak{e}. \end{cases}$$

Daraus folgt unter Verwendung der Formeln (161), (168)

(171) $$\begin{cases} \mathfrak{y}'^2 = -(\mathfrak{e}\mathfrak{x}')^2, \\ \mathfrak{y}'\mathfrak{y}'' = -(\mathfrak{e}\mathfrak{x}')(\mathfrak{e}\mathfrak{x}''), \\ \mathfrak{y}''^2 = -1 - (\mathfrak{e}\mathfrak{x}'')^2. \end{cases}$$

Nach (79) in § 7 ergibt sich somit für die Krümmung von $(\mathfrak{y})$

(172) $$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\mathfrak{y}'^2\mathfrak{y}''^2 - (\mathfrak{y}'\mathfrak{y}'')^2}{(\mathfrak{y}'^2)^3} = -\frac{1}{(\mathfrak{e}\mathfrak{x}')^4}$$

oder nach willkürlicher Entscheidung über ein Vorzeichen

(173) $$\sqrt{i}\,\varrho = \mathfrak{e}\mathfrak{x}', \qquad (i^2 = -1)$$

eine Formel, die eine geometrische Deutung des Vektors $\mathfrak{x}'$ enthält. Z. B. bekommen wir daraus für die Krümmungsradien der Normalrisse auf die Koordinatenebenen

(174) $$\sqrt{i}\,\varrho_k = x_k'$$

und somit

(175) $$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 0.$$

In Worten: *Die Krümmungshalbmesser der Normalrisse einer isotropen Kurve auf drei paarweise senkrechte Ebenen in zugehörigen Punkten haben bei geeigneter Vorzeichenwahl verschwindende Summe*[6]).

§ 20. Integrallose Lösung der Differentialgleichung der isotropen Kurven.

Man kann alle krummen isotropen Linien, also die Lösungen der Differentialgleichung $\mathfrak{x}'^2 = 0$ mittels einer willkürlichen analytischen

[6]) *W. Blaschke*, Archiv f. Mathematik und Physik, **14** (1909), Aufgabe 256, S. 355.

Funktion und deren Ableitungen darstellen. In der Tat! Für die Schmiegebene einer nicht geradlinigen isotropen Linie ist nach (167)

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{x},\ \mathfrak{x}',\ \mathfrak{x}'') = -(\mathfrak{y} - \mathfrak{x},\ \mathfrak{x}') = 0. \tag{176}$$

Der Vektor $\mathfrak{x}'$, der die Stellung der Ebene festlegt, genügt aber der Gleichung $\mathfrak{x}'^2 = 0$. Gehen wir umgekehrt von einer Schar solcher „isotroper" Ebenen aus, die nicht parallel laufen, so können wir sie mittels eines Parameters t so ansetzen:

$$\boxed{(1 - t^2)\, y_1 + i(1 + t^2)\, y_2 - 2t\, y_3 = 2i f(t)}\ , \tag{177}$$

wo $i^2 = -1$ und f eine analytische Funktion bedeutet. Leitet man die Gleichung bei festem $\mathfrak{y}$ zweimal nach t ab, so findet man durch Auflösung für die umhüllte Linie die gewünschte Darstellung

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= i\left(f - tf' - \frac{1-t^2}{2} f''\right), \\ x_2 &= \left(f - tf' + \frac{1+t^2}{2} f''\right), \\ x_3 &= -i(f' - tf''). \end{aligned}} \tag{178}$$

Es folgt daraus:

$$\frac{dx_1}{dt} = -i\frac{1-t^2}{2} f''', \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{1+t^2}{2} f''', \qquad \frac{dx_3}{dt} = it f''', \tag{179}$$

also ist wegen $\mathfrak{x}'^2 = 0$ die Kurve (178) wirklich isotrop. Man hat nur vorauszusetzen, daß f''' nicht identisch verschwindet. Für den „natürlichen" Parameter p von *Vessiot* und *Study* ergibt sich

$$p = \int \sqrt{f'''(t)}\, dt\,. \tag{180}$$

Auch kann man leicht aus der Parameterdarstellung (178) die Ergebnisse vom Schluß des vorigen Paragraphen bestätigen.

§ 21. Aufgaben und Lehrsätze.

1. **Die Parabel als logarithmische Spirale.** Die beiden uneigentlichen Punkte einer Ebene, in denen sich alle Kreise der Ebene durchschneiden, werden als „absolute Punkte" der Ebene bezeichnet. Eine (notwendig imaginäre) Parabel der Ebene, die einen der absoluten Punkte enthält, hat die Eigenschaft: alle Geraden durch den eigentlichen Punkt der Parabel, dessen Tangente durch den andern absoluten Punkt geht, schneiden die Parabel unter demselben Winkel.

2. **Konstruktion des Berührungspunktes.** Zwei Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ durchlaufen zwei räumliche Kurven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ unabhängig voneinander; die Symmetrieebene $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ umhüllt dann im allgemeinen eine Fläche $\mathfrak{F}$. Die Ebene in $\mathfrak{p}$ senkrecht zu $\mathfrak{P}$, die Ebene in $\mathfrak{q}$ senkrecht zu $\mathfrak{Q}$ schneiden sich mit $\mathfrak{E}$ in der Regel im Berührungspunkt von $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{F}$.

3. **Ein Satz von *Halphen*** über räumliche Kraftfelder. Sind alle Bahnkurven, die unter Einwirkung eines unveränderlichen Kraftfeldes bei beliebigen Anfangsbedingungen zustande kommen, eben, so gehen alle Kräfte des Feldes durch denselben festen Punkt. *G. H. Halphen*, Comptes Rendus Paris 1877, S. 939 und *G. Darboux* in *Despeyrous*, Cours de Mécanique I, Paris 1884, S. 433.

4. **Kurven fester Windung.** Jede Kurve mit der festen Windung $1:\tau$ läßt sich in der Form darstellen:

$$\mathfrak{x} = \tau \int_0^t \xi \times d\xi, \tag{181}$$

wo $\xi = \xi(t)$ einen Einheitsvektor bedeutet.

5. **Eine kennzeichnende Eigenschaft der Böschungslinien.** Das Verschwinden der Determinante $(\mathfrak{x}''\mathfrak{x}'''\mathfrak{x}^{IV})$, wobei die Ableitungen nach der Bogenlänge zu nehmen sind, ist für die Böschungslinien kennzeichnend. *A. R. Forsyth*, Differential Geometry, Cambridge 1912, S. 28.

6. **Böschungslinien eines parabolischen Zylinders.** Die Böschungslinien eines parabolischen Zylinders, die mit der durch eine Erzeugende gehenden Symmetrieebene des Zylinders feste Winkel bilden, haben als Normalriß auf die Symmetrieebene gemeine Radlinien, die von einem Umfangspunkt eines auf einer Geraden rollenden Kreises beschrieben werden.

7. **Über Böschungslinien auf Drehflächen zweiter Ordnung.** Betrachten wir auf einer Drehfläche 2. Ordnung eine Böschungslinie, die mit der Drehachse einen festen Winkel bildet! Die Kurve ihrer Krümmungsmittelpunkte liegt auf einer koaxialen Drehfläche zweiter Ordnung und hat als Normalriß auf eine zur Drehachse senkrechte Ebene eine Radlinie, die beim Abrollen zweier — nicht notwendig reeller — Kreise entsteht. *W. Blaschke*, Monatshefte f. Math. u. Phys. **19**, 1908, S. 201.

8. **Ein Satz von *Beltrami*.** Die Tangentenfläche einer Raumkurve schneidet die Schmiegebene in einem Punkte $\mathfrak{p}$ der Kurve in einer ebenen Kurve, deren Krümmungshalbmesser in $\mathfrak{p}$ gleich $4:3$ des Krümmungshalbmessers der Raumkurve in $\mathfrak{p}$ ist. *E. Beltrami*, 1865, Opere I, S. 261.

9. **Minimalprojektion.** Jedem Punkte $\mathfrak{x}(x_1, x_2, x_3)$ im Raume ordnen wir in der Ebene $x_3 = 0$ den „gerichteten Kreis" mit dem Mittelpunkt $x_1, x_2, 0$ und dem Halbmesser ix_3 $(i^2 = -1)$ zu. Diese imaginäre Zuordnung nennt man Minimalprojektion. Durchläuft $\mathfrak{x}$ eine Kurve, so beschreibt der zugehörige Kreis in der Ebene eine Schar mit im allgemeinen zwei einhüllenden Kurven. Zwischen den zugehörigen Bogenlängen s_1, s_2 der beiden Einhüllenden und der

Bogenlänge s der Raumkurve besteht bei geeigneter Vorzeichenwahl die Beziehung $s = s_1 - s_2$.

10. **Ein Satz von *Jacobi*.** Das Hauptnormalenbild einer geschlossenen Kurve begrenzt auf der Einheitskugel zwei flächengleiche Teile. *C. G. J. Jacobi*, 1842, Werke, Bd. 7, S. 39.

11. **Über geschlossene Kurven.** Eine geschlossene reguläre räumliche Kurve ohne mehrfache Punkte habe die Eigenschaft, daß durch jeden ihrer Punkte eine Ebene geht, die die Kurve sonst nirgends trifft. Dann hat die Kurve mindestens vier Punkte mit stationären Schmiegebenen. (*C. Carathéodory*).

12. **Über geschlossene Kurven auf der Kugel.** Auf einer Kugel liege eine geschlossene, durchweg reguläre Kurve ohne mehrfache Punkte, die höchstens zwei Schmiegebenen durch den Kugelmittelpunkt schickt. Diese Kurve liegt dann ganz auf einer Halbkugel.

13. **Kurven konstanter Breite.** Haben je zwei parallele Tangenten einer Eilinie den festen Abstand b, so hat die Eilinie den Umfang πb. *E. Barbier*, Liouvilles Journal (2) **5** (1860), 273—286.

14. **Rektifizierende Ebene.** Die Ebene durch einen Kurvenpunkt senkrecht zu ξ_2 pflegt man rektifizierende Ebene zu nennen. Die rektifizierenden Ebenen einer Kurve $(\mathfrak{x})$ umhüllen im allgemeinen die Tangentenfläche einer Kurve $(\bar{\mathfrak{x}})$. Man findet

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - \frac{1}{\lambda'}(\lambda\,\xi_1 + \xi_3), \qquad \lambda = \frac{\varrho}{\tau}$$
$$\bar{\mathfrak{x}}' = -\left(\frac{1}{\lambda'}\right)'(\lambda\,\xi_1 + \xi_3). \tag{182}$$

Somit gehen die rektifizierenden Ebenen alle durch einen festen Punkt, wenn $\lambda'' = 0$ oder

$$\frac{\varrho}{\tau} = a\,s + b \tag{183}$$

ist (*A. Enneper*). Man kann diesen Sachverhalt durch eine später (§ 56) einzuführende Ausdrucksweise auch so kennzeichnen, daß man sagt: Die Kurven mit $\lambda'' = 0$ sind geodätische Linien auf Kegelflächen. Insbesondere kommen wir für $a = 0$ auf die Böschungslinien zurück.

15. **Kurven von *Study*.** Neben den isotropen Kurven entziehen sich auch noch die Linien in isotropen Ebenen der vorgetragenen Kurventheorie. Diese Kurven hat zuerst *E. Study* untersucht. American Transactions **10**, 1909, S. 25—32.

16. **Ein Satz von *L. Berwald* über Eilinien.** Die Mindestzahl der Punkte mit fünfpunktig berührender logarithmischer Schmiegspirale auf einer Eilinie ist vier. Bei einer Ellipse sind es die Endpunkte der zu den Achsen symmetrischen, konjugierten Durchmesser.

17. **Über die Scheitel einer Eilinie.** Hat eine Eilinie mit einem Kreise $2n$ Punkte gemein, so hat sie mindestens $2n$ Scheitel. *W. Blaschke*, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 161.

18. **Formeln von *Crofton* über Eilinien.** Es sei $\mathfrak{E}$ eine Eilinie, (x_1, x_2) ein äußerer Punkt; L ihr Umfang; t_1, t_2 die Längen der Tangentenstrecken von (x_1, x_2) aus an $\mathfrak{E}$; ϱ_1, ϱ_2 die Krümmungshalbmesser von $\mathfrak{E}$ in den zugehörigen Berührungspunkten und α der Winkel der beiden Tangenten. Dann ist

$$2\pi^2 = \iint \frac{\sin\alpha}{t_1 t_2}\, dx_1\, dx_2, \quad L^2 = 2\iint \sin\alpha\, \frac{\varrho_1 \varrho_2}{t_1 t_2}\, dx_1\, dx_2,$$

wenn die Integration über das Äußere von $\mathfrak{E}$ erstreckt wird. *M. W. Crofton*, Philosophical Transactions **158**. 1868. *H. Lebesgue*, Nouvelles Annales (4) **12**, 1912, S. 495.

19. **Zusammenhang zwischen isotropen Kurven und Kurven fester Windung.** Trägt man auf den Binormalen einer Kurve der festen Windung Eins die Strecke i ($i^2 = -1$) ab, so beschreibt ihr Endpunkt eine isotrope Kurve. Die Bogenlänge der ursprünglichen Kurve kann gleich dem entsprechenden Wert des natürlichen Parameters p der isotropen Kurve gesetzt werden. *E. Study*, American Journal of Mathematics **32**, 1910, S. 264—278.

20. **Die Schmiegebene.** In einem Kurvenpunkte $\mathfrak{x}$ mit $1:\varrho \neq 0$ und $1:\tau \neq 0$ ist die Schmiegebene jene Ebene durch die Tangente in $\mathfrak{x}$, die die Kurve in $\mathfrak{x}$ zerschneidet.

Es sei schließlich noch darauf hingewiesen, daß wir im 7. Kapitel, §§ 104, 105 neuerdings auf die Theorie der Raumkurven unter einem allgemeineren Gesichtspunkt, nämlich im Zusammenhang mit den geradlinigen Flächen, zurückkommen werden.

2. Kapitel.

Extreme bei Kurven.

§ 22. Die erste Variation der Bogenlänge.

Wenn man, wie es später geschehen soll, die Begriffe der Krümmungstheorie der Kurven auf allgemeinere Maßbestimmungen als die *Euklid*s übertragen will, so kann man das z. B. durch Heranziehen der Gesichtspunkte der Variationsrechnung erreichen, nämlich auf folgende Weise. Es sei $\mathfrak{x}(s)$ eine ebene oder räumliche Kurve. Wir leiten daraus eine zweite $(\bar{\mathfrak{x}})$ her durch den Ansatz:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + u\xi_1^* + v\xi_2 + w\xi_3, \tag{1}$$

wobei die $\xi_i(s)$ die Einheitssvektoren des begleitenden Dreibeins von $(\mathfrak{x})$ und u, v, w Funktionen von s bedeuten, die noch einen Parameter ε enthalten:

$$u = \varepsilon\bar{u}(s), \qquad v = \varepsilon\bar{v}(s), \qquad w = \varepsilon\bar{w}(s). \tag{2}$$

Rückt $\varepsilon \to 0$, so rückt die Nachbarkurve $(\bar{\mathfrak{x}})$ gegen $(\mathfrak{x})$. Wir wollen die Länge der Nachbarkurve

$$\bar{s} = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\bar{\mathfrak{x}}'^2}\, ds \tag{3}$$

nach Potenzen von ε entwickeln. Diese Entwicklung wird die Form haben

$$\bar{s} = s + \delta s + \ldots, \tag{4}$$

wenn mit δs das in ε lineare Glied bezeichnet wird:

$$\delta s = \varepsilon \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\bar{s} - s}{\varepsilon}. \tag{5}$$

Man nennt δs die *„erste Variation"* der Bogenlänge. Dieses δs soll zunächst berechnet werden.

Zur Abkürzung für Krümmung und Windung von $(\mathfrak{x})$ führen wir die Bezeichnungen ein

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho}, \qquad \sigma = \frac{1}{\tau}, \tag{6}$$

wodurch die *Frenet*formeln (§ 6) die Gestalt annehmen

$$\xi_1' = \varkappa\xi_2, \qquad \xi_2' = -\varkappa\xi_1 + \sigma\xi_3, \qquad \xi_3' = -\sigma\xi_2. \tag{7}$$

Dann folgt aus (1) durch Ableitung nach der Bogenlänge s von $(\mathfrak{x})$

$$(8) \qquad \bar{\mathfrak{x}}' = (1 + u' - \varkappa v)\,\xi_1 + (v' + \varkappa u - \sigma w)\,\xi_2 + (w' + \sigma v)\,\xi_3.$$

Daraus ist das innere Quadrat

$$(9) \qquad \bar{\mathfrak{x}}'^2 = (1 + u' - \varkappa v)^2 + \ldots,$$

wobei die weggelassenen Glieder in ε von zweiter Ordnung sind. Weiter folgt

$$(10) \qquad \frac{d\bar{s}}{ds} = 1 + u' - \varkappa v + \ldots$$

und durch Integration

$$(11) \qquad \bar{s} = s + [u]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \varkappa v\, ds + \ldots$$

Somit ist endlich

$$(12) \qquad \boxed{\delta s = [u]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \varkappa v\, ds.}$$

Hieraus kann man eine Reihe von Folgerungen ziehen. Da in δs zwar $\bar{u}$, $\bar{v}$, aber nicht $\bar{w}$ vorkommt, so sieht man: *Die Binormalen einer Raumkurve sind dadurch gekennzeichnet, daß bei beliebiger unendlich kleiner Verrückung der Kurve in Richtung der Binormalen die Bogenlänge stationär bleibt.* Ferner: haben $(\mathfrak{x})$ und $(\bar{\mathfrak{x}})$ die Randpunkte gemein $[\bar{u}(s_1) = 0,\ \bar{u}(s_2) = 0]$, so wird:

$$(13) \qquad \delta s = -\int_{s_1}^{s_2} \varkappa v\, ds.$$

$v = \varepsilon\bar{v}$ sind die unendlich kleinen auf der Hauptnormalen von $(\mathfrak{x})$ abgetragenen Komponenten von $\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x} = \delta\mathfrak{x}$. Wir wollen für v auch δn schreiben, also

$$(14) \qquad \delta s = -\int_{s_1}^{s_2} \varkappa \cdot \delta n \cdot ds.$$

Diese Formel werden wir später (§ 53) bei allgemeineren Maßbestimmungen zur Definition der Krümmung $\varkappa$ von $(\mathfrak{x})$ verwerten.

§ 23. Variationsprobleme von J. Radon.

Jetzt soll ermittelt werden, wie sich die Krümmung $\varkappa$ beim Übergang von $(\mathfrak{x})$ zur Nachbarkurve $(\bar{\mathfrak{x}})$ ändert. Wir wollen der Einfachheit halber $u = 0$, also

$$(15) \qquad \bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + v\,\xi_2 + w\,\xi_3$$

setzen, was eine ganz unwesentliche Einschränkung bedeutet. Dann wird unter Verwertung von *Frenets* Formeln § 6 (71)

$$(16) \qquad \bar{\mathfrak{x}}' = (1 - \varkappa v)\,\xi_1 + (v' - \sigma w)\,\xi_2 + (w' + \sigma v)\,\xi_3,$$

$$(17) \qquad \bar{\mathfrak{x}}'' = (*)\,\xi_1 + \{(1 - \varkappa v)\varkappa + (v' - \sigma w)' - (w' + \sigma v)\sigma\}\,\xi_2 + (*)\,\xi_3.$$

Die mit (*) bezeichneten Glieder sind darin von erster Ordnung in ε. Nach § 7 (79) ist die Krümmung $\bar{\varkappa} = 1 : \bar{\varrho}$ von $(\bar{\mathfrak{x}})$

$$\bar{\varkappa} = \frac{\sqrt{\bar{\mathfrak{x}}'^2 \bar{\mathfrak{x}}''^2 - (\bar{\mathfrak{x}}' \bar{\mathfrak{x}}'')^2}}{(\sqrt{\bar{\mathfrak{x}}'^2})^3}.$$

Läßt man die in ε quadratischen Glieder weg, so wird

$$\bar{\varkappa} = \frac{\sqrt{\bar{\mathfrak{x}}''^2}}{\bar{\mathfrak{x}}'^2} + \dots \tag{18}$$

und

$$\bar{\mathfrak{x}}'^2 = 1 - 2\varkappa v + \dots,$$

$$\sqrt{\bar{\mathfrak{x}}''^2} = (1 - \varkappa v)\varkappa + (v' - \sigma w)' - (w' + \sigma v)\sigma + \dots,$$

also

$$\bar{\varkappa} = (1 + \varkappa v)\varkappa + (v' - \sigma w)' - (w' + \sigma v)\sigma + \dots \tag{19}$$

oder

$$\delta\varkappa = \varkappa^2 v + (v' - \sigma w)' - (w' + \sigma v)\sigma. \tag{20}$$

Es sei nun nach *J. Radon* ein „Variationsproblem“ von folgender Art vorgelegt. Man soll zwei gegebene Punkte des Raumes durch eine Kurve $\mathfrak{x}$ miteinander verbinden, längs derer das Integral

$$J = \int \varphi(\varkappa) \cdot ds \tag{21}$$

einen extremen Wert bekommt. Dabei sei φ eine vorgegebene Funktion. Gehen wir dann zu einer Nachbarkurve $(\bar{\mathfrak{x}})$ mit denselben Randpunkten über, so muß jedenfalls die „erste Variation“ von J, das sind wieder die in ε linearen Glieder der Reihenentwicklung von J nach Potenzen von ε, verschwinden. Wegen (10) oder $d\bar{s} = (1 - \varkappa v)\, ds + \dots$ wird

$$\bar{J} = \int \varphi(\bar{\varkappa})\, d\bar{s} = \int \varphi(\varkappa + \delta\varkappa) \cdot (1 - \varkappa v)\, ds + \dots \tag{22}$$

Also ist

$$\delta J = \int (\varphi' \delta\varkappa - \varphi\varkappa v)\, ds. \tag{23}$$

Für $\delta\varkappa$ setze man aus (20) den Wert ein und forme den Ausdruck durch Integration nach Teilen um unter Beachtung der festen Randpunkte. Dabei wollen wir annehmen, daß am Rande nicht nur v und w, sondern auch noch v' verschwinden soll. So erhält man

$$\delta J = \int ds \left[\left\{ (\varkappa^2 - \sigma^2)\varphi' + \frac{d^2\varphi'}{ds^2} - \varkappa\varphi \right\} v + \left\{ \sigma \frac{d\varphi'}{ds} + \frac{d}{ds}(\sigma\varphi') \right\} w \right]. \tag{24}$$

Soll nun δJ bei beliebiger Wahl der Verrückungen $v(s)$, $w(s)$, die nur verschwindende Randwerte zu haben brauchen, gleich Null sein, so müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{cases} (\varkappa^2 - \sigma^2)\varphi' + \dfrac{d^2\varphi'}{ds^2} - \varkappa\varphi = 0, \\ \sigma \dfrac{d\varphi'}{ds} + \dfrac{d}{ds}(\sigma\varphi') = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Die zweite Differentialgleichung, die für ebene Kurven ($\sigma = 0$) von selbst erfüllt ist, läßt sich integrieren. Es ist

$$2\sigma\frac{d\varphi'}{ds} + \varphi'\frac{d\sigma}{ds} = 0,$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{d\varphi'}{\varphi'} = 0.$$

$$\sigma = \frac{c}{\varphi'^2}. \tag{26}$$

Damit ist die Windung der „*Extremalen*" unseres Variationsproblems bestimmt. Als Extremalen bezeichnet man die Kurven, für die $\delta J = 0$ ist, für die also die Differentialgleichungen (25) gelten.

§ 24. Bestimmung der Extremalen unsrer Variationsprobleme.

Radon hat bemerkt, daß man die gefundenen Differentialgleichungen zusammen mit $\frac{d}{ds}\varphi = \varphi'\frac{d\varkappa}{ds}$ so schreiben kann

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(\varkappa\varphi' - \varphi) = +\varkappa\cdot\frac{d\varphi'}{ds}, \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi'}{ds}\right) = -\varkappa(\varkappa\varphi' - \varphi) + \sigma\frac{c}{\varphi'}, \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{c}{\varphi'}\right) = -\sigma\cdot\frac{d\varphi'}{ds}. \end{cases} \tag{27}$$

Diese drei linearen, homogenen Differentialgleichungen haben wie die *Frenet*formeln (§ 13) eine schiefsymmetrische Matrix. Also gilt

$$\frac{d}{ds}\left\{(\varkappa\varphi' - \varphi)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{c}{\varphi'}\right)^2\right\} = 0$$

und

$$(\varkappa\varphi' - \varphi)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{c}{\varphi'}\right)^2 = a^2. \tag{28}$$

Hier kann man $\varkappa$ als unabhängige Veränderliche nehmen und $ds : d\varkappa$ als Funktion von $\varkappa$ berechnen. Somit ist die Differentialgleichung (28) durch eine einzige Integration („Quadratur") lösbar, also auch umgekehrt $\varkappa$ als Funktion von s zu bestimmen. Da nach (26) $\sigma(s)$ bekannt ist, so sind damit die natürlichen Gleichungen der Extremalen ermittelt.

Aber noch mehr! Die Formeln (27) haben nicht nur die schiefsymmetrische Gestalt der *Frenet*formeln, sie sind sogar, wenn man für $\varkappa, \sigma$ wieder $1:\varrho$, $1:\tau$ schreibt, mit den *Frenet*formeln identisch. Deshalb und wegen (28) kann man das Achsenkreuz so wählen, daß

$$\xi_{13} = \frac{\varkappa\varphi' - \varphi}{a}, \qquad \xi_{23} = \frac{1}{a}\cdot\frac{d\varphi'}{ds}, \qquad \xi_{33} = \frac{c}{a}\frac{1}{\varphi'}, \tag{29}$$

wird. Daraus ergibt sich dann

$$\frac{dx_3}{ds} = \frac{\varkappa\varphi' - \varphi}{a}. \tag{30}$$

Ferner ist

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2. \tag{31}$$

Nach (30) und (28) kann man dafür auch schreiben:

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\left\{\left(\frac{d\varphi'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{c}{\varphi'}\right)^2\right\}. \tag{32}$$

Aus

$$\xi_1 \times \xi_2 = \xi_3$$

oder

$$\frac{d\xi}{ds} \times \frac{d^2\xi}{ds^2} = \varkappa\xi_3$$

folgt nach (29)

$$\frac{dx_1}{ds}\cdot\frac{d^2x_2}{ds^2} - \frac{dx_2}{ds}\cdot\frac{d^2x_1}{ds^2} = \varkappa\xi_{33} = \frac{c}{a}\frac{\varkappa}{\varphi'}.$$

Nach (32) folgt daraus

$$\frac{\frac{dx_1}{ds}\cdot\frac{d^2x_2}{ds^2} - \frac{dx_2}{ds}\cdot\frac{d^2x_1}{ds^2}}{\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2} = ac\,\frac{\varkappa}{\varphi'\left\{\left(\frac{d\varphi'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{c}{\varphi'}\right)^2\right\}}$$

und durch Integration

$$\operatorname{arc\,tg}\left\{\left(\frac{dx_2}{ds}\right):\left(\frac{dx_1}{ds}\right)\right\} = ac\int\frac{\varkappa\,ds}{\varphi'\left\{\left(\frac{d\varphi'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{c}{\varphi'}\right)^2\right\}}. \tag{33}$$

Jetzt sind die Ableitungen von $x_1(s)$ und $x_2(s)$ aus den Gleichungen (32) und (33) zu ermitteln und daraus diese Funktionen selbst durch Integration.

Damit ist das Ergebnis von *Radon* gefunden:

Die Extremalen der Variationsprobleme

$$\delta\int\varphi(\varkappa)\cdot ds = 0 \tag{34}$$

sind durch Quadraturen auffindbar.

Betrachten wir den besonderen Fall,

$$\varphi(\varkappa) = \sqrt{\varkappa}, \tag{35}$$

so wird nach (26)

$$\sigma = 4c\varkappa. \tag{36}$$

Das heißt nach § 15: die Extremalen sind Böschungslinien. Umgekehrt folgt aus (26), daß das Variationsproblem (35) unter denen von der Gestalt (34) im wesentlichen das einzige ist, dessen Extremalen Böschungslinien sind.

Aus (28) erhält man für $\varkappa$

$$\varkappa = \frac{1}{4\,a^2 s^2 + \dfrac{1+16\,c^2}{4\,a^2}}. \tag{37}$$

Die Tangenten der Böschungslinien schließen nach § 15 mit einer festen Richtung e einen festen Winkel ϑ ein, und zwar ist nach (36) und nach § 15 (132)

$$4\,c = \operatorname{ctg}\vartheta. \tag{38}$$

Für Bogenlänge und Krümmung des Normalrisses unserer Böschungslinie auf eine zu e senkrechte Ebene haben wir nach § 15 (139), (141)

$$\bar{s} = s\sin\vartheta, \qquad \varkappa = \bar{\varkappa}\sin^2\vartheta.$$

Somit ergibt sich für diesen Normalriß die natürliche Gleichung

$$\bar{\varkappa} = \frac{1}{4\,a^2\bar{s}^2 + \sin^2\vartheta\cdot\dfrac{1+16\,c^2}{4\,a^2}}. \tag{39}$$

Diese Kurven bezeichnet man als „Kettenlinien".

§ 25. Die Isoperimetrie des Kreises.

Unter allen geschlossenen Kurven desselben Umfangs in der Ebene soll die ermittelt werden, die den größten Flächeninhalt umschließt. Das ist die klassische „isoperimetrische" Aufgabe. Beim Übergang von einer geschlossenen zur benachbarten Kurve findet man für die Änderung des Umfangs L wegen der Periodizität der Verrückung v nach (12)

$$\delta L = -\oint \varkappa v\,ds. \tag{40}$$

Die Änderung des Flächeninhalts ist offenbar der Streifen, der von den benachbarten Kurven begrenzt wird:

$$\delta F = -\oint v\,ds, \tag{41}$$

vorausgesetzt, daß man über das Vorzeichen von F geeignete Festsetzungen trifft. Soll nun die geschlossene Kurve, längs derer integriert wird, unsere Aufgabe lösen, so muß für jede Funktion $v(s)$ mit der Periode L, für die $\delta L = 0$ ist, von selbst auch $\delta F = 0$ sein. Dafür ist $\varkappa =$ konst. hinreichend.

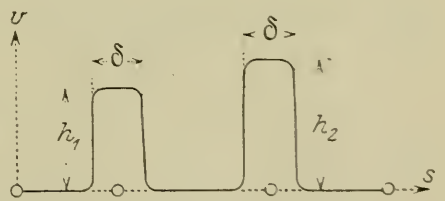


Fig. 6.

Daß diese Bedingung auch notwendig ist, erkennt man etwa so. Hätte die Funktion $\varkappa(s)$, die wir als stetig annehmen wollen, auf der Strecke $0 \leqq s < L$ an zwei Stellen s_1, s_2 zwei verschiedene Werte

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$, so könnte man die Funktion $v(s)$ in der in der Fig. 6 gezeichneten Art wählen, so daß

$$\oint v\,ds \quad \text{nahezu} \quad = \delta(h_1 + h_2),$$
$$\oint \varkappa v\,ds \quad \text{nahezu} \quad = \delta(h_1\varkappa_1 + h_2\varkappa_2)$$

wird. Ist also $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$, so kann man h_1, h_2 so wählen, daß $\delta L = 0$ und $\delta F \neq 0$ wird, entgegen der Voraussetzung.

Wer wegen der nicht analytischen Wahl von $v(s)$ in Fig. 6 Bedenken hat, kann sich leicht eine analytische, etwas verwickeltere Funktion herstellen, die dasselbe leistet.

Gibt es also unter „allen" geschlossenen Kurven der Ebene mit vorgegebenem Umfang eine mit größtem Flächeninhalt, so muß für sie $\varkappa =$ konst., d. h. die Kurve muß ein Kreis sein[1]). Hier bleibt also eine Existenzfrage offen. Ferner kann man den isoperimetrischen Satz noch in sehr verschiedenem Umfang beweisen, je nach den Voraussetzungen, die man über die zur Auswahl zugelassenen Kurven macht[2]).

§ 26. Beweis von *Frobenius*[3]).

Wenn die Kreislinie wirklich die isoperimetrische Eigenschaft hat, so kann man diese Tatsache folgendermaßen fassen. *Zwischen Flächeninhalt F und Umfang L eines Kreises besteht die Beziehung*

(42 a) $$L^2 - 4\pi F = 0.$$

und für jede andere geschlossene ebene Kurve ist

(42 b) $$L^2 - 4\pi F > 0.$$

Für diesen Satz soll hier ein sehr einfacher Beweis vorgetragen werden, den man *G. Frobenius* verdankt, bei dem aber zur Auswahl nur die Eilinien zugelassen werden.

Es sei $\mathfrak{E}$ eine nach links herum umlaufene Eilinie, $\mathfrak{E}_p$ die äußere Parallelkurve im Abstand p, deren Tangenten also von den gleichsinnig parallelen Tangenten an $\mathfrak{E}$ den festen Abstand p haben. Offenbar ist $\mathfrak{E}_p$ wieder eine Eilinie[4]). Es sei ferner $\mathfrak{E}^*$ der nach links um-

---

[1]) Es ist nämlich der Krümmungsmittelpunkt in diesem Fall ein fester Punkt: $\frac{d}{ds}(x_1 - \varrho x_2') = 0$, $\frac{d}{ds}(x_2 + \varrho x_1') = 0$ nach § 9 (85).

[2]) Unter recht allgemeinen Voraussetzungen findet man den Beweis in dem Büchlein des Verfassers „Kreis und Kugel" (Leipzig 1916) geführt. Dort finden sich auch Literaturangaben.

[3]) *G. Frobenius*, Über den gemischten Flächeninhalt zweier Ovale, Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akademie. Berlin 1915 (1), S. 387—404.

[4]) Die Beziehung zwischen der Eilinie $\mathfrak{E}$ und der Parallelkurve $\mathfrak{E}_p$ kann man sich etwa so deutlich machen. Es sei in der Bezeichnung von § 9 (83)

$$x_1 \sin\tau - x_2 \cos\tau = h(\tau)$$

fahrene Einheitskreis; $\mathfrak{D}$ ein Dreieck von Tangenten an $\mathfrak{E}$, dessen Fläche $\mathfrak{E}$ enthält, $\mathfrak{D}_p$ und $\mathfrak{D}^*$ die gleichsinnig parallelen Tangentendreiecke an $\mathfrak{E}_p$ und $\mathfrak{E}^*$. Ferner sei t die Länge der Strecke auf einer Tangente an $\mathfrak{E}$ gemessen vom Berührungspunkt im positiven Sinn der Tangente bis zum Austrittspunkt aus $\mathfrak{D}$; t_p und t^* die entsprechenden Strecken auf den gleichsinnig parallelen Tangenten; φ ihr Winkel mit einer festen Richtung; D, D_p, D^* die Flächeninhalte von $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_p$, $\mathfrak{D}^*$ und F, F_p, $F^* = \pi$ die Flächeninhalte von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_p$, $\mathfrak{E}^*$; endlich r der

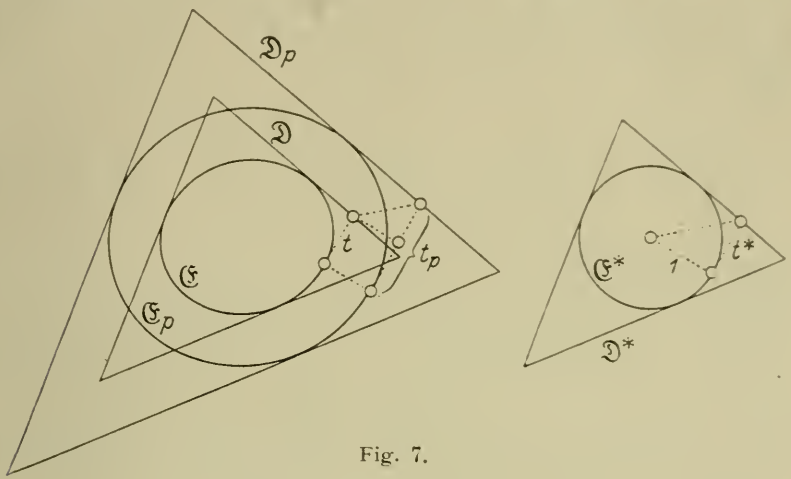


Fig. 7.

Halbmesser des dem Dreieck $\mathfrak{D}$ einbeschriebenen Kreises (vgl. die Fig. 7). Dann ist

$$t_p(\varphi) = t(\varphi) + p t^*(\varphi),$$

$$F_p = D_p - \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} t_p^{\,2}\, d\varphi,$$

$$F_p = (p + r)^2 D^* - \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} (t + p t^*)^2\, d\varphi. \tag{43}$$

Anderseits gilt für den Flächeninhalt der Parallelkurve

$$F_p = F + pL + p^2 F^*, \tag{44}$$

---

die Gleichung der Tangenten an $\mathfrak{E}$ mit der Richtung τ. Dann findet man für den Krümmungshalbmesser ϱ von $\mathfrak{E}$

$$\varrho = h(\tau) + h''(\tau),$$

so daß sich die Konvexität von $\mathfrak{E}$ dadurch ausdrückt, daß $h(\tau)$ die Periode 2π hat und $h + h'' > 0$ ist. Dann gilt aber für eine Parallelkurve $\mathfrak{E}_p$

$$\varrho_p = p + h + h'',$$

und somit folgt aus $\varrho > 0$, $p > 0$ auch $\varrho_p = p + \varrho > 0$. Darin ist wegen der Periodizität von $p + h(\tau)$ die Konvexität von $\mathfrak{E}_p$ enthalten.

wo L den Umfang von $\mathfrak{E}$ bedeutet. Das kann man etwa so einsehen. Setzt man auf jedes Bogenelement ds von $\mathfrak{E}$ ein unendlich schmales Trapez auf, von dem zwei Seiten in die Normalen an $\mathfrak{E}$ fallen und die Länge p haben, so hat dieses die Fläche

$$p\,(ds + \tfrac{1}{2}p\,d\varphi)$$

und daher ist wirklich

$$F_p - F = \oint p\,(ds + \tfrac{1}{2}p\,d\varphi) = pL + p^2\pi.$$

Da das in p quadratische Polynom F_p für $p = 0$ positiv und für $p + r = 0$ nach (43) $\leqq 0$ ist, so sind die Wurzeln der Gleichung $F_p = 0$ in p sicher reell, also ist nach (44)

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0, \tag{45}$$

was zu beweisen war.

Es bleibt nur noch der *Einzigkeitsbeweis* zu führen, das heißt zu zeigen, daß in (45) das Gleichheitszeichen nur für den Kreis gilt.

Soll für das quadratische Polynom F_p die „Diskriminante“ $L^2 - 4\pi F = 0$ sein, so darf F_p sein Vorzeichen nicht wechseln. Da F_p für $p = 0$ positiv ist, darf F_p für $p = -r$ nicht < 0 sein. Somit muß in (43) für $p = -r$ das Integral verschwinden, also $t : t^* = r$ = konst. sein. Ändert man eine Seite des Dreiecks $\mathfrak{D}$ ab, so bleibt für gewisse Richtungen (nämlich für solche Tangenten, deren Endpunkte auf einer anderen Dreieckseite liegen) das Verhältnis $t : t^*$ und damit r ungeändert. Somit haben alle unserer Eilinie $\mathfrak{E}$ umschriebenen Dreiecke denselben Inkreishalbmesser. Daraus folgt aber sofort, daß $\mathfrak{E}$ ein Kreis ist. Hält man nämlich zwei Tangenten fest, so bleibt der Inkreis fest, die dritte umhüllt also diesen Kreis.

Der Beweis in der vorgetragenen Form ist dann ohne weiteres richtig, wenn die zur Auswahl zugelassenen Eilinien $\mathfrak{E}$ keine Ecken und keine geradlinigen Strecken enthalten. Er läßt sich aber auch leicht auf beliebige Eilinien ausdehnen[5]).

§ 27. Ein Beweis von *A. Hurwitz.*

Wir werden später (§ 55) den isoperimetrischen Satz unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen über die zulässigen Vergleichskurven anzuwenden haben. Wir wollen deshalb hier noch einen zweiten rechnerischen Beweis andeuten, der sich einiger Sätze über trigonometrische Reihen bedient, und der die erstrebte Allgemeingültigkeit hat. Es sei

$$x_1 = x_1(s), \qquad x_2 = x_2(s); \qquad 0 \leqq s \leqq L$$

eine stetige geschlossene Kurve, von der wir nur noch anzunehmen brauchen, daß sie eine Bogenlänge s besitzt, d. h. daß sie „streckbar“

---

[5]) Eine noch anschaulichere Form hat *H. Liebmann* dem Beweis von *Frobenius* gegeben, Mathem. Zeitschrift **4** (1919), S. 288—294.

oder „rektifizierbar" ist. Wir führen an Stelle von s den proportionalen Parameter u ein durch die Formel

$$u = \frac{2\pi}{L} s$$

und entwickeln x_1 und x_2 in trigonometrische Reihen nach u:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_k \cos ku + a_k' \sin ku), \\ x_2 &= \tfrac{1}{2} b_0 + \sum_1^\infty (b_k \cos ku + b_k' \sin ku). \end{aligned} \tag{46}$$

Wenn die Kurve streckbar ist, sind nach *H. Lebesgue* die Funktionen $x_1(s)$, $x_2(s)$ im wesentlichen differenzierbar und die *Fourier*reihen der Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{du} &\sim \sum_1^\infty k (a_k' \cos ku - a_k \sin ku), \\ \frac{dx_2}{du} &\sim \sum_1^\infty k (b_k' \cos ku - b_k \sin ku). \end{aligned} \tag{47}$$

Während die Reihen (46) wegen der Voraussetzungen über unsere Kurve stets konvergieren und die Funktionen darstellen, braucht dasselbe für die Reihen (47) nicht mehr zuzutreffen.

Nun ist

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 = 1.$$

Daraus folgt für die Differentiation nach dem Parameter u

$$\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{du}\right)^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$$

und somit

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{du}\right)^2 \right\} du = 2\pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2. \tag{48}$$

Ist nun

$$f(u) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^\infty (\alpha_k \cos ku + \alpha_k' \sin ku)$$

die *Fourier*reihe einer nach *Lebesgue* integrierbaren Funktion, so gilt die „*Vollständigkeitsbeziehung*" für das *Fourier*orthogonalsystem

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u)^2 du = \tfrac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_1^\infty (\alpha_k^2 + \alpha_k'^2). \tag{49}$$

Ein wenig allgemeiner: Aus

$$\begin{aligned} f(u) &\sim \tfrac{1}{2} \alpha_0 + \sum_1^\infty (\alpha_k \cos ku + \alpha_k' \sin ku), \\ g(u) &\sim \tfrac{1}{2} \beta_0 + \sum_1^\infty (\beta_k \cos ku + \beta_k' \sin ku) \end{aligned}$$

folgt

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)\,g(u)\,du = \tfrac{1}{2}\alpha_0\beta_0 + \sum_1^\infty(\alpha_k\beta_k + \alpha_k'\beta_k'). \tag{50}$$

Somit ergibt sich aus (48), wenn man die Reihenentwicklungen (47) einsetzt, nach (49)

$$\pi\sum_1^\infty k^2(a_k^2 + a_k'^2 + b_k^2 + b_k'^2) = 2\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2. \tag{51}$$

Erklärt man anderseits den Flächeninhalt unserer Kurve durch das Randintegral

$$F = \int_{-\pi}^{+\pi} x_1\frac{dx_2}{du}\,du, \tag{52}$$

so erhält man durch Einsetzen der Reihen (46), (47) wegen (50)

$$\pi\sum_1^\infty k(a_k b_k' - a_k' b_k) = F. \tag{53}$$

Aus den gefundenen Formeln (51), (53) folgt aber

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2F = \pi\sum_1^\infty\{(ka_k - b_k')^2 + (ka_k' + b_k)^2 + (k^2-1)(b_k^2 + b_k'^2)\}.$$

Darin ist aber offenbar die isoperimetrische Ungleichheit

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0$$

enthalten. Man erkennt, daß das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn

$$a_1' + b_1 = 0, \quad a_1 - b_1' = 0,$$
$$a_k = a_k' = b_k = b_k' = 0; \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Dann haben die Entwicklungen (46) die Form

$$x_1 = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos u + a_1'\sin u,$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2}b_0 - a_1'\cos u + a_1\sin u$$

und stellen einen Kreis dar. Damit ist ganz allgemein gezeigt:

Bei allen geschlossenen, streckbaren ebenen Kurven gilt zwischen Umfang L und dem durch (52) erklärten Flächeninhalt F die Beziehung $L^2 - 4\pi F \geqq 0$. Es ist nur dann $L^2 - 4\pi F = 0$, wenn die Kurve ein Kreis ist.

Der vorgetragene Beweis stammt von *A. Hurwitz* aus dem Jahre 1902[6]). Wegen der benutzten Hilfsmittel aus der Theorie der trigonometrischen Reihen vergleiche man ein neueres Lehrbuch über diesen Gegenstand[7]).

---

[6]) *A. Hurwitz*, Quelques applications géométriques des séries de Fourier; Annales de l'école normale (3) **19** (1902), S. 357—408, bes. S. 392—394.

[7]) Etwa *Ch.-J. de la Vallée-Poussin*, Cours d'Analyse, tome II, Paris 1912, S. 165.

§ 28. Ein Hilfssatz über Kurven auf der Kugel.

Es sollen im folgenden einige schöne Sätze über raumliche Kurven mit der konstanten Krümmung Eins hergeleitet werden, die in Zusammenhang mit Untersuchungen von *K. Weierstraß* in den achtziger Jahren von *H. A. Schwarz* gefunden worden sind, und deren Kenntnis der Verfasser einer mündlichen Mitteilung von *C. Carathéodory* verdankt. Als Vorbereitung werde folgendes bewiesen.

Hilfssatz. *Eine Kurve von der Länge $l < \pi$ beginne im Nordpol der Einheitskugel. Es sei α die Poldistanz des Schwerpunktes der homogen mit Masse belegten Kurve. Dann ist stets*

$$\alpha \leqq \frac{l}{2}$$

und nur dann gleich $l:2$, wenn die Kurve Teilbogen eines Meridiankreises ist.

Zum Beweise nehmen wir den Kugelmittelpunkt zum Ursprung und die Richtung zum Nordpol als x_3-Richtung eines rechtwinkligen Achsenkreuzes. Dann verschieben wir die auf unserer Kurve befindlichen Massen in den Ebenen $x_3 = \text{konst.}$ unverändert nach einem im Nordpol beginnenden Meridianhalbkreis. Wir behaupten zunächst daß für den so belegten Kreisbogen die Poldistanz α_1 des Schwerpunkts größer ist als die für die ursprüngliche Kurve ($\alpha_1 \geqq \alpha$). In der Tat! Es ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{(\int x_1\, dm)^2 + (\int x_2\, dm)^2}}{\int x_3\, dm}.$$

Darin ist wegen $l < \pi$ der Nenner positiv, d. h. die Hauptmasse unserer Kurve liegt auf der nördlichen Halbkugel, denn um vom Nordpol zum Äquator zu gelangen, muß man mindestens den Weg $\pi:2$ zurücklegen. Bei unserer Verschiebung der Massenelemente dm bleibt der Nenner fest; vom Zähler kann man aber einsehen, daß er wächst,

$$(54) \qquad (\int x_1\, dm)^2 + (\int x_2\, dm)^2 \leqq (\int \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dm)^2.$$

Führt man nämlich diese Integrale formal in Doppelintegrale über, also in leicht verständlicher Bezeichnung beispielsweise

$$(\int x_1\, dm)^2 = \int\int x_1 \bar{x}_1\, dm\, d\bar{m},$$

so nimmt die zu beweisende Ungleichheit die Gestalt an

$$\int\int (x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2)\, dm\, d\bar{m} \leqq \int\int \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2}\, dm\, d\bar{m}.$$

Zur Bestätigung braucht man nur zu zeigen, daß

$$(55) \qquad (x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2)^2 \leqq (x_1^2 + x_2^2)(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2)$$

ist. Dazu genügt es zu beachten, daß

$$\sum_i (\xi x_i + \bar{\xi} \bar{x}_i)^2 \qquad (i = 1, 2)$$

eine positiv definite quadratische Form in $\xi, \bar{\xi}$ ist, was zwischen den Koeffizienten der Form genau die Beziehung (55) zur Folge hat.

Damit ist zunächst nachgewiesen, daß $\alpha \leqq \alpha_1$, oder, wenn die Poldistanz eines auf der ursprünglichen Kurve beweglichen Punktes mit ϑ bezeichnet wird,

$$\operatorname{tg} \alpha \leqq \frac{\int \sin \vartheta \, dm}{\int \cos \vartheta \, dm}.$$

Die Integrationen rechter Hand können ebensogut auch an der verschobenen Kurve, also an dem Meridianbogen gedeutet werden.

War die Dichte der ursprünglichen Massenbelegung Eins, ihre Gesamtmasse also l, so ist die Dichte des (nicht längeren) Meridianbogens $\geqq 1$; also ist auf diesem Bogen $dm \geqq ds$. Wir zerlegen nun die Massenbelegung des Meridianbogens in zwei Teile, erstens in die homogene Belegung mit der Dichte Eins (ihr Schwerpunkt sei $\mathfrak{s}_1$, ihre Gesamtmasse m_1) und zweitens in die Belegung $dm - ds$ (deren Schwerpunkt sei $\mathfrak{s}_2$, deren Gesamtmasse $m_2 = l - m_1$). Wir heben nun die zweite Belegung ab und benutzen sie, um anschließend an den mit m_1 belegten Meridianbogen nach Süden hin die Verlängerung des Meridians mit einer Belegung von der Dichte Eins und derselben Gesamtmasse $m_2 = l - m_1$ zu versehen. Der neue Schwerpunkt sei $\mathfrak{s}_2'$. Der alte Gesamtschwerpunkt $\mathfrak{s}$ des Meridianbogens ergibt sich, wenn man in $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ die Massen m_1, m_2 anbringt, und der neue $\mathfrak{s}'$, wenn die Masse m_2 von $\mathfrak{s}_2$ nach $\mathfrak{s}_2'$ verlegt wird. Da die Poldistanz von $\mathfrak{s}_2'$ größer ist als die von $\mathfrak{s}_2$, so folgt aus der Fig. 8, daß die Poldistanz α_1 von $\mathfrak{s}$ jedenfalls $\leqq$ als die Poldistanz $l:2$ von $\mathfrak{s}'$ ist. Damit ist aber der Hilfssatz

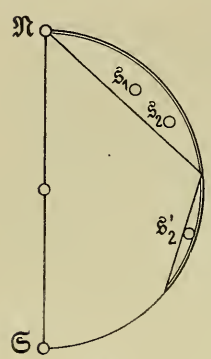


Fig. 8.

$$\alpha \leqq \alpha_1 \leqq \frac{l}{2}$$

nachgewiesen.

Beim Beweise wurde die Ungleichheit (55) von *Cauchy* benutzt. Aus (55) folgt, daß in (54) nur dann das Gleichheitszeichen gelten kann, wenn x_1, x_2 linear abhängen, wenn also schon der ursprüngliche Kurvenbogen auf einem Meridian liegt. Somit ist nur dann

$$\alpha = \frac{l}{2},$$

wenn die Ausgangskurve ein homogener Meridianbogen ist. Damit ist unser Hilfssatz völlig bewiesen.

Man kann leicht ergänzend zeigen, daß der Hilfssatz auch noch für $l = \pi$ gültig bleibt.

§ 29. Sätze von *H. A. Schwarz* über Raumkurven fester Krümmung.

Als Krümmung einer Kurve war das Verhältnis der Bogenelemente der Kurve $(\mathfrak{x})$ und ihres Tangentenbildes $(d\mathfrak{x} : ds)$ bezeichnet worden. Hat eine Kurve die feste Krümmung Eins, so sind entsprechende Kurvenbogen auf der Kurve und ihrem Tangentenbild gleich lang. Durch Angabe des Tangentenbildes $\xi_1(s_1) = \xi_1(s) = d\mathfrak{x} : ds = \xi(s)$ (wie hier einfacher geschrieben werden soll) ist die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ bis auf Schiebungen gegeben. Denn es ist, wenn wir etwa $\mathfrak{x}(0) = 0$ setzen,

$$\mathfrak{x} = \int_0^s \xi \, ds. \tag{56}$$

Es soll nun gezeigt werden:

(I) *Der Winkel α eines Kurvenbogens von der festen Krümmung Eins und der Länge $l \leqq \pi$ mit seiner Sehne ist $\leqq l : 2$ und nur dann $= l : 2$, wenn die Kurve Teilbogen eines Einheitskreises ist.*

Das ist nur eine andere Ausdrucksweise für den im vorigen Paragraphen bewiesenen Hilfssatz. Der Winkel α (Fig. 9) zwischen $\mathfrak{x}'(0) = \xi(0)$ und $\mathfrak{x}(l)$ ist nämlich wegen (56) gleich dem Winkel zwischen $\xi(0)$ und dem Vektor

$$\mathfrak{s} = \frac{1}{l} \int_0^l \xi(s) \, ds,$$

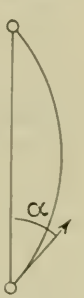


Fig. 9.

also, wenn $\xi(0)$ zum Nordpol weist, gleich der Poldistanz des Schwerpunkts unserer homogen mit der Massendichte Eins belegten sphärischen Kurve $\xi(s)$, die auf $\mathfrak{x}(s)$ längentreu bezogen ist.

Setzen wir weiterhin

$$\mathfrak{x}^2 = r^2,$$

so ist durch Ableitung

$$\frac{\mathfrak{x}}{r} \xi = \frac{dr}{ds}.$$

Nach unserem Satz (I) ergibt sich daraus

$$\frac{dr}{ds} = \cos\left(\frac{\mathfrak{x}}{r}, \, \xi\right) \geqq \cos\frac{s}{2} \tag{57}$$

und durch Integration

$$r \geqq 2 \sin\frac{l}{2}. \tag{58}$$

(II) *Alle Kurvenbogen von der festen Krümmung Eins, deren Längen $\leqq \pi$ sind, und die zwei Punkte, deren Entfernung < 2 ist, miteinander verbinden, haben kürzere Bogenlänge als der kleinere Bogen eines Einheitskreises durch die beiden Punkte.*

Der Größtwert von l wird nur für die Kreisbogen erreicht. Man sieht leicht ein, daß die l-Werte die Strecke

$$r < l \leqq 2 \arcsin \frac{r}{2} \tag{59}$$

ganz ausfüllen. Insbesondere kann man dem Wert $l = r$ dadurch beliebig nahe kommen, daß man Schraubenlinien auf genügend dünnen Kreiszylindern verwendet.

§ 30. Weitere Ungleichheiten von *H. A. Schwarz* für Kurven fester Krümmung.

Wir wollen nun weiterhin folgendes beweisen:

(III) *Es seien* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei Punkte, deren Entfernung* $d < 2$ *ist. Wir verbinden beide durch eine Kurve* $\mathfrak{C}$ *mit der festen Krümmung Eins, deren Länge* $\pi < l < 2\pi$ *ist. Unter allen diesen Kurven* $\mathfrak{C}$ *haben die kleinste Länge die größeren Teilbogen der Einheitskreise durch* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$.

Es sei $\mathfrak{c}$ der (erste) Punkt der Kurve $\mathfrak{C}$, der vom Anfangspunkt $\mathfrak{a}$ die größte Entfernung r' hat (Fig. 10). $\mathfrak{c}$ fällt sicher nicht nach $\mathfrak{b}$, und r' ist $\geqq 2$, da der in $\mathfrak{a}$ beginnende Teilbogen von $\mathfrak{C}$ mit der Länge π nach (58) eine Sehne $\geqq 2 > d$ hat. Der Winkel zwischen r' und der in $\mathfrak{c}$ an $\mathfrak{C}$ gezogenen Tangente $\mathfrak{T}$ ist, da $\mathfrak{c}$ der von $\mathfrak{a}$ fernste Punkt auf $\mathfrak{C}$ ist, ein rechter Winkel $(dr' : ds = \mathfrak{x}(s')\,\mathfrak{x}'(s') = 0)$. Demnach ist nach § 29 (I) der Bogen s' auf $\mathfrak{C}$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ sicher $\geqq \pi$. Der Bogen s'' zwischen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ ist $< \pi$ wegen $l = s' + s'' < 2\pi$. Da $s'' < \pi$ ist, gilt nach (I) für den Winkel β zwischen der Tangente $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{c}$ und der Sehne $\mathfrak{cb}$

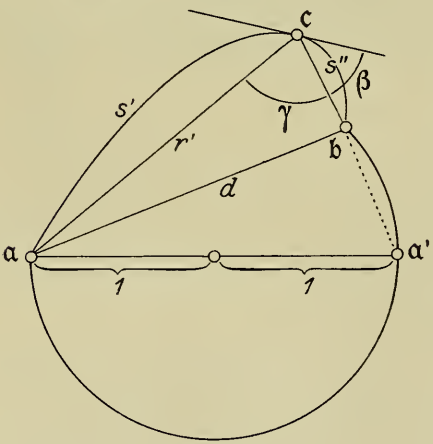


Fig. 10.

$$\beta \leqq \frac{s''}{2}. \tag{60}$$

Wegen des rechten Winkels zwischen r' und $\mathfrak{T}$ ist weiter, wenn γ der Winkel des Dreiecks $\mathfrak{abc}$ bei $\mathfrak{c}$ ist,

$$\beta + \gamma \geqq \frac{\pi}{2}. \tag{61}$$

Da sicherlich $d \geqq$ dem kürzesten Abstand des Punktes $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{cb}$ ist, haben wir

$$d \geqq r' \sin\gamma \geqq 2 \sin\gamma \geqq 2 \cos\beta \geqq 2 \cos\frac{s''}{2}. \tag{62}$$

Wir verbinden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auch durch den größeren Einheitskreisbogen

(vgl. Fig. 10) und bezeichnen den Bogen dieses Kreises zwischen dem Gegenpunkt $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit σ''. Dann ist

$$d = 2\cos\frac{\sigma''}{2}. \tag{63}$$

Aus (62) und (63) folgt aber das behauptete Ergebnis

$$s'' \geqq \sigma'' \quad \text{oder} \quad l = s' + s'' \geqq \pi + \sigma''. \tag{64}$$

Der Kleinstwert $\pi + \sigma''$ wird wieder nur für die Kreisbogen erreicht.

Die Sätze (II) und (III) lassen sich auch so zusammenfassen: *Es seien* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei Punkte eines Einheitskreises und* λ_1, λ_2 $[\lambda_1 < \lambda_2]$ *seien die durch die beiden Punkte begrenzten Teilbogen des Kreises. Die Bogenlängen* l *aller Kurven der festen Krümmung Eins, die* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *verbinden, sind entweder* $\leqq \lambda_1$, *oder* $\geqq \lambda_2$.

Ist die Entfernung d der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ aber $\geqq 2$, so kann die Bogenlänge l jeden Wert $> d$ annehmen. Es sei auch erwähnt, daß zur Gültigkeit der Beweise §§ 28—30 nur vorausgesetzt zu werden braucht, daß die Tangentenbilder (ξ_1) streckbare[8]) (rektifizierbare) sphärische Kurven sind. Die Kurven $(\underline{x})$ brauchen also keineswegs zweimal stetig differenzierbar zu sein. Die vorkommenden Integrale sind dann im Sinne von *Stieltjes*[8]) zu verstehen.

§ 31. Bemerkungen und Aufgaben.

1. **Über die Notwendigkeit von Existenzbeweisen in der Variationsrechnung.** *R. v. Mises* hat die Aufgabe gestellt: Zwei gerichtete Linienelemente in der Ebene sollen durch eine immer im gleichen Sinn gekrümmte gerichtete Kurve der Ebene so verbunden werden, daß die größte Krümmung der Kurve möglichst klein wird. Man zeige, daß die Aufgabe keine Lösung hat. Dagegen wird die Aufgabe lösbar, wenn man die Gesamtkrümmung oder die Gesamtlänge der zulässigen Kurven einschränkt. *W. Blaschke*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **27** (1918), S. 234—236; *R. v. Mises*, ebenda **28** (1919), S. 92—102. Wegen der Existenzfragen vgl. man im folgenden §§ 85, 99.

2. **Variationsproblem von *Ch. E. Delaunay*.** Die in den letzten Paragraphen behandelten Gegenstände hängen mit folgendem Variationsproblem zusammen:

Zwei Punkte $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *sollen durch eine Kurve* $(\underline{x})$ *der festen Krümmung Eins verbunden werden, deren Richtung in* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *durch die Einheitsvektoren* α *und* β *gegeben sei, und deren Bogenlänge ein Extrem ist.*

---

[8]) Vgl. etwa mein Büchlein „Kreis und Kugel", Leipzig 1916.

Wir bekommen für den Vektor $\xi = d\mathfrak{x} : ds$ folgende Bedingungen:

$$\xi^2 = 1,$$

$$\int_\alpha^\beta \xi \sqrt{\xi'^2}\, dt = \int \xi ds = [\mathfrak{x}(s)] = \mathfrak{b} - \mathfrak{a}, \tag{65}$$

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\xi'^2} dt \quad = \int ds = \text{Extrem.}$$

Die Extremalen dieser Variationsaufgabe lassen sich, wie *K. Weierstraß* 1884 gezeigt hat[9]), mittels elliptischer Funktionen aufstellen.

3. **Über Kurven mit fester Krümmung.** Man zeige, daß alle Kurven der Krümmung Eins, die vom Punkt $\mathfrak{a}$ mit der Richtung α ausgehen, und deren Länge $\leqq \pi$ ist, einen Körper erfüllen, der durch Umdrehung des in der Fig. 11 schraffierten Flächenstücks um seine

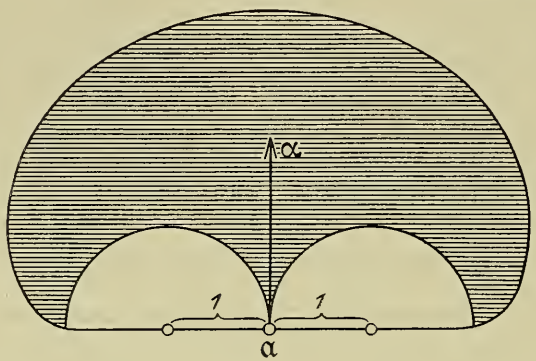


Fig. 11.

Symmetrieachse beschrieben wird. Das Flächenstück ist durch zwei Halbkreisbogen mit dem Halbmesser Eins und durch zwei Bogen von Evolventen dieser Halbkreise begrenzt.

Bei der Besprechung der geodätischen Krümmung einer auf einer Fläche gezogenen Kurve werden wir auf die in den §§ 28—30 behandelten Fragen von *H. A. Schwarz* zurückkommen (vgl. § 55).

4. **Eine Verallgemeinerung der Sätze von *Schwarz* über die Kurven fester Krümmung.** Verwenden wir bei der Überlegung von § 28 eine *unhomogene* Kette $\xi(\sigma)$ mit der Dichte $\varrho(\sigma) > 0$ ($\xi^2 = 1$, $\xi'^2 = 1$), so erhalten wir für die Kurve $\mathfrak{x} = \int \xi \varrho d\sigma$, die $\xi(\sigma)$ zum Tangentenbild und ϱ zum Krümmungshalbmesser hat, an Stelle von § 29 (I) den Satz:

[9]) *K. Weierstraß*, Über eine die Raumkurven konstanter Krümmung betreffende von *Delaunay* herrührende Aufgabe der Variationsrechnung. Werke III, S. 183—217. Dort findet man auch die Vorgeschichte des Variationsproblems angegeben.

(I*) *Ein Kurvenbogen mit der natürlichen Gleichung* $\varrho = \varrho(s) > 0$ *und der „Gesamtkrümmung"*

$$\int \frac{ds}{\varrho} = \int d\sigma \leqq \frac{\pi}{2}$$

schließt mit seiner Sehne in den Endpunkten dann und nur dann den kleinsten Winkel ein, wenn er in einer Ebene liegt $(1 : \tau = 0)$.

Als Verallgemeinerung von (II) folgt daraus:

(II*) *Ein ebener Kurvenbogen begrenzt mit seiner Sehne einen Eibereich. Bei jeder „Verwindung" dieses Kurvenbogens, das heißt bei jeder räumlichen Formänderung, die die Bogenlängen und Krümmungen erhält, wächst notwendig die Länge der Sehne.* Vgl. *A. Schur*, Mathematische Annalen **83** (1921), S. 143—148; *W. Blaschke*, Abhandlungen des Mathematischen Seminars Hamburg **1** (1921), S. 49—53. Dort findet man auch den Beweis von § 28 vereinfacht.

5. **Variation von Kurven mit fester Windung.** Von den Punkten einer Kurve mit fester Windung werden in den Schmiegebenen feste unendlich kleine Strecken derart abgetragen, daß die Änderung der Bogenlänge zwischen irgend zwei Punkten verschwindet. Dann hat auch die variierte Kurve feste Windung[10]).

6. **Die Isoperimetrie auf der Kugel nach *F. Bernstein*.** Es sei $\mathfrak{E}$ eine Eilinie auf einer Einheitskugel $\mathfrak{K}$, eine geschlossene Kurve also, die von jedem Großkreis von $\mathfrak{K}$ in höchstens zwei Punkten geschnitten wird. Es sei F der Flächeninhalt des „Inneren" von $\mathfrak{E}$, d. h. des kleineren der von $\mathfrak{E}$ begrenzten zwei Oberflächenteile von $\mathfrak{K}$, und L der Umfang von $\mathfrak{E}$. Dann drückt sich die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises in der sphärischen Geometrie so aus: Es ist für jede Eilinie $\mathfrak{E}$

$$(2\pi - F)^2 + L^2 \geqq (2\pi)^2 \tag{66}$$

und nur dann $=$, wenn $\mathfrak{E}$ ein Kreis ist. Zum Beweis betrachte man die äußere Parallelkurve $\mathfrak{E}_\varepsilon$ im sphärischen Abstand ε von $\mathfrak{E}$, die für $0 \leqq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ keinen Doppelpunkt hat. Man findet für ihren Inhalt F_ε und ihre Länge L_ε

$$\begin{aligned} (2\pi - F_\varepsilon) &= (2\pi - F)\cos\varepsilon - L\sin\varepsilon, \\ L_\varepsilon &= (2\pi - F)\sin\varepsilon + L\cos\varepsilon; \\ (2\pi - F)^2 + L^2 &= (2\pi - F_\varepsilon)^2 + L_\varepsilon^2. \end{aligned} \tag{67}$$

Somit genügt es, zu zeigen, daß für $F_\varepsilon = 2\pi$ die Beziehung $L_\varepsilon \geqq 2\pi$ besteht. Dazu braucht man nur nachzuweisen, daß jede geschlossene und doppelpunktfreie sphärische Kurve, die die Kugelfläche hälftet, mindestens zwei Gegenpunkte enthält. *F. Bernstein*, Mathematische Annalen **60** (1905), S. 117—136.

---

[10]) Vgl. *L. Bianchi*, Memorie della società italiana delle scienze (3) **18** (1913), S. 7—10.

3. Kapitel.

Anfangsgründe der Flächentheorie.

Im ersten Kapitel waren die bekanntesten Lehren aus der Krümmungstheorie der Kurven zusammengestellt worden. Hier soll Entsprechendes für die Lehre von der Krümmung der Flächen geschehen, wie sie nach den ersten Untersuchungen von *L. Euler* (1707—1783), dann insbesondere von *G. Monge* (1746—1818) in seinem klassischen Werk „L'application de l'analyse à la géométrie", das 1795 zu erscheinen begonnen hat, begründet worden ist. Die tiefergehenden Gedanken von *Gauß*ens „Disquisitiones circa superficies curvas" (1827) werden in dem vorliegenden Kapitel nur zum geringen Teil verwertet und bilden die Grundlage des vierten Kapitels. Während das Wesentliche der Kurventheorie schon in den Formeln von *Frenet* enthalten ist, wodurch sie etwas einförmig wirkt, ist die Flächentheorie ungleich vielgestaltiger und anziehender.

§ 32. Die erste Grundform.

Für die meisten Untersuchungen ist die zweckmäßigste analytische Darstellung krummer Flächen die Parameterform. Wir setzen

$$x_k = x_k(u, v);\ k = 1, 2, 3 \tag{1}$$

oder vektoriell abgekürzt

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v). \tag{2}$$

Man spricht von der *Gauß*ischen Parameterdarstellung. Die Funktionen $x_k(u, v)$ setzen wir als analytisch voraus, also als entwickelbar in konvergente Potenzreihen in $(u - u_0)$, $(v - v_0)$. Dabei sollen in der Regel nur reelle Parameterwerte u, v und reelle Funktionen x_k zugelassen werden.

Betrachtet man auf der Fläche die „Parameterlinien" $v =$ konst., $u =$ konst., die man entsprechend auch u-Linien und v-Linien nennen kann, so wollen wir die Tangentenvektoren an diese beiden Kurven, nämlich den Vektor

$\mathfrak{x}_u$ mit den Koordinaten $\frac{\partial x_k}{\partial u}$ und

$\mathfrak{x}_v$ mit den Koordinaten $\frac{\partial x_k}{\partial v}$

an den betrachteten Stellen der Fläche als linear unabhängig voraussetzen:

$$\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0. \tag{3}$$

Setzen wir $u = u(t)$, $v = v(t)$, so wird auf unsrer Fläche eine Kurve festgelegt mit dem Tangentenvektor

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{x}_u \frac{du}{dt} + \mathfrak{x}_v \frac{dv}{dt}, \tag{4}$$

der auf dem Vektorprodukt $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ senkrecht steht. Aus $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0$ folgt also, daß die Tangenten an alle Flächenkurven durch die betreffende Stelle u, v in einer Ebene liegen, der *Tangentenebene* der Fläche an dieser Stelle. Diese Tangentenebene steht senkrecht zum Einheitsvektor der Flächennormalen

$$\xi = \frac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{\sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}}. \tag{5}$$

Für das „*Bogenelement*“ ds^2 unsrer Flächenkurve $\mathfrak{x}(u(t), v(t))$ erhalten wir die Formel

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 = \mathfrak{x}_u^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\,\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \mathfrak{x}_v^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2. \tag{6}$$

Führen wir die von *Gauß* herrührenden Abkürzungen ein

$$\boxed{E = \mathfrak{x}_u^2, \quad F = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v, \quad G = \mathfrak{x}_v^2,} \tag{7}$$

so wird

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{8}$$

eine quadratische Differentialform, die man als das *Bogenelement der Fläche* oder als *die erste Grundform* bezeichnet. Geht man mit der Abkürzung (7) in den Ausdruck (5) für die Flächennormale hinein, so findet man nach der Identität von *Lagrange* (§ 3 (42))

$$\xi = \frac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{9}$$

Als Beispiel nehmen wir eine *Gauß*sche Parameterdarstellung der Einheitskugel (Fig. 12), bei der wir statt u, v lieber ϑ, φ schreiben wollen,

$$\begin{cases} x_1 = \sin\vartheta \cos\varphi, \\ x_2 = \sin\vartheta \sin\varphi, \\ x_3 = \cos\vartheta. \end{cases} \tag{10}$$

ϑ bedeutet die „Poldistanz“ vom „Nordpol“ $\mathfrak{N}$ (0, 0, 1) und φ die „geographische Länge“. $\vartheta =$ konst. sind die „Parallele“, $\varphi =$ konst. die „Meridiane“. Die Pole sind singuläre Stellen unsrer Parameterdarstellung, da $\partial \mathfrak{x} : \partial \varphi$ für $\vartheta = 0, \pi$ verschwindet, also die Bedingung (3) nicht mehr erfüllt ist. Diese Bedingung scheidet also nicht nur singuläre Stellen der Fläche aus, wie etwa die Spitze eines Drehkegels, sondern auch Singularitäten der Parameterdarstellung. Für das Bogenelement unsrer Kugel erhält man

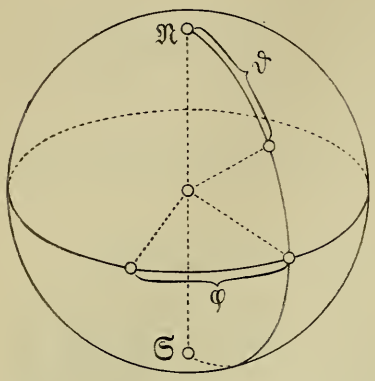


Fig. 12.

$$(11) \quad ds^2 = d\vartheta^2 + (\sin\vartheta\, d\varphi)^2,$$

für den Normalenvektor

$$(12) \qquad \xi = \pm \mathfrak{x}.$$

§ 33. Die zweite Grundform.

Wenn man die längs einer Flächenkurve gültige Identität

$$\frac{d\mathfrak{x}}{ds}\,\xi = 0$$

unter Berücksichtigung der ersten Formel *Freneis* (§ 6) nach s ableitet, so folgt

$$(13) \qquad \frac{\xi_2\,\xi}{\varrho} = -\frac{d\mathfrak{x}}{ds}\cdot\frac{d\xi}{ds},$$

wenn ξ_2 den Einheitsvektor auf der Hauptnormalen unsrer Flächenkurve und ϱ ihren Krümmungshalbmesser bedeutet. Den Ausdruck

$$(14) \qquad \begin{aligned} -d\mathfrak{x}\cdot d\xi &= -(\mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv)(\xi_u du + \xi_v dv) \\ &= L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 \end{aligned}$$

führt man nun als *zweite Grundform* der Flächentheorie ein. Setzen wir kurz

$$(15) \qquad \boxed{\begin{aligned} E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 &= I, \\ L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 &= II, \end{aligned}}$$

so schreibt sich die Gleichung (13)

$$(16) \qquad \frac{\xi_2\,\xi}{\varrho} = \frac{II}{I}.$$

Aus (14) ergeben sich durch Koeffizientenvergleichung die Werte der L, M, N

$$(17) \qquad \begin{aligned} L &= -\mathfrak{x}_u\xi_u, \quad N = -\mathfrak{x}_v\xi_v \\ 2M &= -(\mathfrak{x}_u\xi_v + \mathfrak{x}_v\xi_u). \end{aligned}$$

Die letzte Formel kann man auch anders schreiben. Leitet man die Identitäten

$$\mathfrak{x}_u \xi = 0, \quad \mathfrak{x}_v \xi = 0$$

nach v und u ab, so folgt

$$\mathfrak{x}_{uv} \xi + \mathfrak{x}_u \xi_v = 0, \quad \mathfrak{x}_{uv} \xi + \mathfrak{x}_v \xi_u = 0$$

und somit

$$-\mathfrak{x}_u \xi_v = -\mathfrak{x}_v \xi_u = \mathfrak{x}_{uv} \xi = M. \tag{18}$$

Leitet man die gleichen Identitäten nach u und v ab, so wird

$$\mathfrak{x}_{uu} \xi + \mathfrak{x}_u \xi_u = 0, \quad \mathfrak{x}_{vv} \xi + \mathfrak{x}_v \xi_v = 0.$$

Man findet nach (17)

$$L = \mathfrak{x}_{uu} \xi, \quad N = \mathfrak{x}_{vv} \xi.$$

Führt man aus (9) den Ausdruck für ξ ein, so erhält man schließlich

$$\boxed{\begin{aligned} L &= -\mathfrak{x}_u \xi_u = \frac{(\mathfrak{x}_{uu}\, \mathfrak{x}_u\, \mathfrak{x}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ M &= -\mathfrak{x}_u \xi_v = -\mathfrak{x}_v \xi_u = \frac{(\mathfrak{x}_{uv}\, \mathfrak{x}_u\, \mathfrak{x}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ N &= -\mathfrak{x}_v \xi_v = \frac{(\mathfrak{x}_{vv}\, \mathfrak{x}_u\, \mathfrak{x}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}} \tag{19}$$

§ 34. Sätze von *Meusnier* und *Euler*.

Die Formel (16) oder

$$\frac{\xi_2 \xi}{\varrho} = \frac{II}{I} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

enthält eine Reihe geometrischer Sätze. Zunächst: Alle Flächenkurven, die durch denselben Flächenpunkt gehen und hier dieselbe Schmiegebene haben, besitzen dort auch gleiche Krümmung. Um die Verteilung der Krümmungen der Flächenkurven in einem Flächenpunkt kennen zu lernen, genügt es also, die ebenen Schnitte der Fläche zu untersuchen.

Betrachten wir jetzt alle ebenen Schnitte durch unsern Flächenpunkt, die hier noch eine Flächentangente gemein haben. Ist Θ der Winkel der Schnittebene mit der Flächennormalen, also $\xi_2 \xi = \cos\Theta$, so wird

$$\frac{\cos\Theta}{\varrho} = \text{konst.} \tag{20}$$

Setzen wir $\Theta = 0$, bekommen wir die Krümmung $1 : R$ des Normalschnitts. Also

$$\boxed{\frac{\cos\Theta}{\varrho} = \frac{1}{R}, \quad \varrho = R\cos\Theta.} \tag{21}$$

Darin steckt der „Satz von *Meusnier*“ (1776):

Die Krümmungskreise aller ebenen Schnitte durch dasselbe Linienelement der Fläche liegen auf einer Kugel. Oder: Alle zugehörigen Krümmungsachsen bilden ein Büschel (liegen in einer Ebene und gehen durch einen Punkt).

Als „Linienelement" ist dabei ein Punkt mit einer Tangentenrichtung zu verstehen. Legen wir alle Schnitte senkrecht zur Zeichenebene, so gibt Figur 13 ein Bild des Satzes von *Meusnier*.

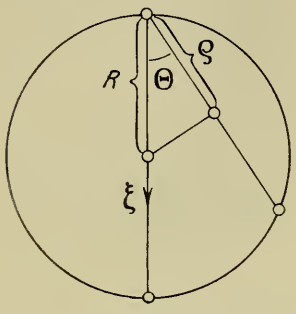


Fig. 13.

Setzen wir in (16) jetzt ξ_2 und ξ gleichgerichtet und gleichsinnig voraus, so wird $\xi_2 \xi = 1$, und wir bekommen für die Krümmungen der Normalschnitte

$$\frac{1}{R} = \frac{II}{I}. \tag{22}$$

Dabei ist nach den in § 5 über das Vorzeichen der Krümmung getroffenen Festsetzungen $R > 0$, wenn der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der Seite des Flächenpunkts liegt, nach der die (willkürlich gewählte) Normalenrichtung ξ hinweist. Im entgegengesetzten Fall ist $R < 0$.

Da $I = ds^2 > 0$ ist, hängt das Vorzeichen von R nur von dem von II ab. Wir haben zwei wesentlich verschiedene Fälle, je nachdem dieses Zeichen mit der Änderung von $du : dv$ fest bleibt oder wechselt. Ist $LN - M^2 > 0$, so hat II festes Zeichen: die Krümmungsmittelpunkte aller Normalschnitte durch den Flächenpunkt $\mathfrak{x}$ liegen auf derselben Seite von $\mathfrak{x}$. Man sagt, die Fläche ist im Punkt $\mathfrak{x}$ *elliptisch* gekrümmt. (Beispiel: alle Punkte einer Kugel.) Ist $LN - M^2 = 0$, so haben wir zwar noch keinen Zeichenwechsel von $1 : R$, aber eine einzige reelle Nullrichtung $(1 : R = 0)$. Man spricht von einem *parabolischen* Flächenpunkt. Endlich ist $LN - M^2 < 0$ kennzeichnend für *hyperbolische* Krümmung.

Deutlicher werden diese Verhältnisse, wenn wir eine besondere Parameterdarstellung benutzen: $x_1 = u$, $x_2 = v$, $x_3 = f(u, v)$. Legen wir unsern Flächenpunkt in den Ursprung, seine Tangentenebene in die x_1, x_2-Ebene, so sieht die Reihenentwicklung von f so aus:

$$x_3 = \tfrac{1}{2}(r x_1^2 + 2 s x_1 x_2 + t x_2^2) + \ldots. \tag{23}$$

Ferner wird im Ursprung $E = G = 1$, $F = 0$; $L = r$, $M = s$, $N = t$; also ist nach (22)

$$\frac{1}{R} = r \cos^2\varphi + 2 s \sin\varphi \cos\varphi + t \sin^2\varphi, \tag{24}$$

wenn φ den Winkel der Tangentenrichtung im Ursprung mit der

x_1-Achse bedeutet. Setzt man

$$\sqrt{|R|}\cos\varphi = y_1, \quad \sqrt{|R|}\sin\varphi = y_2,$$

so wird

$$ry_1^2 + 2sy_1y_2 + ty_2^2 = \pm 1 \tag{25}$$

die Gleichung eines Kegelschnitts (oder eines Kegelschnittpaares), den man als *Indikatrix* von *Dupin* bezeichnet (Fig. 14). Dieser Kegelschnitt um den Ursprung als Mittelpunkt ist ein ähnliches Abbild der Näherungsschnittkurven unsrer Fläche mit Ebenen $x_3 = \text{konst.}$ für kleines $|x_3|$.

Aus unsrer Reihenentwicklung folgt, daß bei elliptischer Krümmung ($rt - s^2 > 0$) die Fläche in der Umgebung des Ursprungs eine Seite der Tangentenebene $x_3 = 0$ ganz freiläßt, während bei hyperbolischer Krümmung die Tangentenebene die Fläche in beliebiger Nähe des Ursprungs durchschneidet. Man kann sich über solche hyperbolischen Flächenpunkte am besten an dem Beispiel $x_3 = x_1x_2$ ein Bild machen. Weist die x_3-Achse nach oben, so liegen in den beiden Winkeln $x_1x_2 > 0$ die Berge und in $x_1x_2 < 0$ die Täler, die im Ursprung einen Sattel bilden.

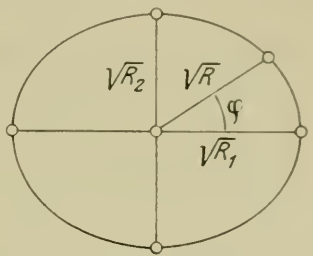


Fig. 14.

Schließen wir den parabolischen Fall aus (nehmen also die Voraussetzung $rt - s^2 \neq 0$ als erfüllt an), so können wir die Achsen der Indikatrix als x_1, x_2-Achsen wählen. Dann wird $s = 0$ und (24) bekommt die Form

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}.} \tag{26}$$

Das ist die Formel von *Euler*, die die Krümmung eines beliebigen Normalschnittes aus den „*Hauptkrümmungen*“ herzuleiten gestattet. Dabei sind die Hauptkrümmungen die Krümmungen der Normalschnitte durch die Achsen der Indikatrix von *Dupin*. Als „*Asymptoten*“ oder „*Wendetangenten*“ *der Fläche* bezeichnet man die Asymptoten der Indikatrix.

§ 35. Die Hauptkrümmungen.

Es galt für die Krümmungen der Normalschnitte in einem Flächenpunkt die Gleichung (22)

$$\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Schreibt man $1:R$ vor, so ist das eine quadratische Gleichung für die Richtung $du:dv$

$$(27)\quad (RL-E)\,du^2+2(RM-F)\,du\,dv+(RN-G)\,dv^2=0.$$

Wir wollen die Werte von $1:R$, für die diese Gleichung in $du:dv$ eine Doppelwurzel hat, *die Hauptkrümmungen* der Fläche nennen in Übereinstimmung mit der im nichtparabolischen Fall mittels der Indikatrix gegebenen Erklärung. Soll (27) in $du:dv$ eine Doppelwurzel haben, so muß neben der Gleichung (27) in $du:dv$ noch die gelten, die man aus (27) durch Ableitung nach $du:dv$ erhält. Oder, was auf dasselbe hinauskommt, es müssen nebeneinander die Beziehungen bestehen

$$(28)\quad \begin{cases} (RL-E)\,du+(RM-F)\,dv=0, \\ (RM-F)\,du+(RN-G)\,dv=0. \end{cases}$$

Daraus folgt für R die Gleichung

$$\begin{vmatrix} RL-E & RM-F \\ RM-F & RN-G \end{vmatrix}=0.$$

Diese Gleichung hätte man auch unmittelbar aus (27) entnehmen können. Sie bedeutet das Verschwinden der Diskriminante von (27). Die Determinante gibt ausgerechnet

$$(29)\quad (EG-F^2)\frac{1}{R^2}-(EN-2FM+GL)\frac{1}{R}+(LN-M^2)=0.$$

Somit ergeben sich für die symmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen die Werte

$$(30)\quad \boxed{\begin{aligned} \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}&=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}, \\ \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}&=\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}. \end{aligned}}$$

Man setzt auch

$$(31)\quad \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=K,\qquad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=2H$$

und nennt K das *Gaußische Krümmungsmaß* und H *die mittlere Krümmung der Fläche*. Diese beiden „Krümmungen“ treten bei Flächen an Stelle der einzigen Krümmung bei Kurven. Es ist schon deshalb bequemer, an Stelle von $1:R_1$, $1:R_2$ die symmetrischen Verbindungen K, H einzuführen, weil diese aus den beiden Grundformen rational zu berechnen sind.

H wechselt das Zeichen, wenn man bei

$$(32)\quad \sqrt{EG-F^2}=W$$

das Vorzeichen ändert, eine Irrationalität, die nach (19) in der Erklärung der zweiten Grundform steckt, während K vom Vorzeichen

dieser Wurzel W nicht abhängt. Nach § 34 ist $K > 0$ für einen Flächenpunkt mit elliptischer, $= 0$ für einen Flächenpunkt parabolischer Krümmung und < 0 für hyperbolische Krümmung.

§ 36. *Gauß*ens Theorema egregium.

Daß K von der Irrationalität W (32) nicht abhängt, sieht man am deutlichsten, wenn man in

$$K = \frac{LN - M^2}{W^2}$$

für L, N, M die Werte aus (19) einsetzt:

$$K = \frac{1}{W^4}\left\{(\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v)(\mathfrak{x}_{vv}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v) - (\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v)^2\right\}. \tag{33}$$

Man kann nun, wenn man auf den Klammerausdruck zweimal den Multiplikationssatz für Determinanten anwendet, leicht das berühmte Ergebnis von *Gauß* herleiten, daß K allein aus E, F, G und den Ableitungen dieser Funktionen nach u, v bis zur zweiten Ordnung bestimmbar ist. Man findet

$$K = \frac{1}{W^4}\left\{\begin{vmatrix} (\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_{vv}) & (\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_u) & (\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_v) \\ (\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_{vv}) & E & F \\ (\mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_{vv}) & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{uv}^2 & (\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_u) & (\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_v) \\ (\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_u) & E & F \\ (\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_v) & F & G \end{vmatrix}\right\}$$

oder

$$K = \frac{1}{W^4}\left\{\begin{vmatrix} \{(\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_{vv}) - \mathfrak{x}_{uv}^2\} & (\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_u) & (\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_v) \\ (\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_{vv}) & E & F \\ (\mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_{vv}) & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & (\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_u) & (\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_v) \\ (\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_u) & E & F \\ (\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_v) & F & G \end{vmatrix}\right\}. \tag{34}$$

Aus der Erklärung

$$\mathfrak{x}_u^2 = E, \qquad \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v = F, \qquad \mathfrak{x}_v^2 = G$$

folgt aber durch Ableitung

$$\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_u = \tfrac{1}{2}E_u, \tag{35}$$

$$\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_u = \tfrac{1}{2}E_v; \tag{36}$$

$$\mathfrak{x}_{vv}\mathfrak{x}_v = \tfrac{1}{2}G_v, \tag{37}$$

$$\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_v = \tfrac{1}{2}G_u; \tag{38}$$

$$\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_v = F_u - \tfrac{1}{2}E_v, \tag{39}$$

$$\mathfrak{x}_{vv}\mathfrak{x}_u = F_v - \tfrac{1}{2}G_u. \tag{40}$$

Leitet man (38) nach u und (39) nach v ab, so erhält man durch nachträgliches Abziehen

$$\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_{vv} - \mathfrak{x}_{uv}^2 = -\tfrac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \tfrac{1}{2}E_{vv}. \tag{41}$$

Damit ist in (34) alles durch E, F, G ausgedrückt:

(42)

$$(EG-F^2)^2 K = \begin{vmatrix} (-\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}) & \frac{1}{2}E_u & (F_u-\frac{1}{2}E_v) \\ (F_v-\frac{1}{2}G_u) & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}.$$

In dieser einfachen und naheliegenden Art ist das berühmte *Gauß*ische Ergebnis von *R. Baltzer* hergeleitet worden[1]). *Gauß* selbst ist 1826 durch sehr langwierige Rechnungen zu einer gleichwertigen Formel gekommen[2]). Ihre geometrische Deutung soll erst später (§ 52) erörtert werden.

§ 37. Krümmungslinien.

Die Gleichungen (28) oder

$$(43) \qquad \begin{cases} R(L\,du + M\,dv) - (E\,du + F\,dv) = 0 \\ R(M\,du + N\,dv) - (F\,du + G\,dv) = 0 \end{cases}$$

ergeben, wenn man R herauswirft, für die „*Hauptrichtungen*“ auf der Fläche, die den Achsen der Indikatrix entsprechen, in $du:dv$ die quadratische Gleichung

$$(44) \qquad \begin{vmatrix} L\,du + M\,dv & E\,du + F\,dv \\ M\,du + N\,dv & F\,du + G\,dv \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(45) \quad (LF - ME)\,du^2 + (LG - NE)\,du\,dv + (MG - NF)\,dv^2 = 0$$

oder endlich

$$(46) \qquad \begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Eine Kurve auf einer Fläche, deren Richtung in jedem Flächenpunkt mit einer zugehörigen Hauptrichtung zusammenfällt, nennt man „*Krümmungslinie*“. Da die Indikatrix im allgemeinen zwei reelle Achsen hat, so gehen durch einen Flächenpunkt im allgemeinen zwei reelle aufeinander senkrechte Krümmungslinien. (44), (45), (46) sind verschiedene Formen der Differentialgleichung dieses orthogonalen Kurvennetzes auf der Fläche.

---

[1]) *R. Baltzer*, Ableitung der *Gauß*schen Formeln für die Flächenkrümmung. Leipziger Berichte, math.-phys. Klasse **18** (1866), S. 1–6.

[2]) Vergl. *P. Stäckel*, Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von *Gauß*, V: *Gauß* als Geometer (1918), bes. S. 120–125. Ferner den folgenden § 73.

Um noch eine zweite Erklärung der Krümmungslinien geben zu können, führen wir den Begriff der „*Torse*“ ein. Eine Fläche, die als Ort einer einparametrigen Geradenschar angesehen werden kann, nennt man eine „*geradlinige Fläche*“ oder auch eine „*Regelfläche*“ in unglücklicher Übersetzung des französischen „surfaces réglées“. Insbesondere sollen die geradlinigen Flächen, die Tangentenflächen von Kurven sind, und dazu noch die Kegel- und Zylinderflächen als „Torsen“ bezeichnet werden. Jetzt erklären wir:

Eine Flächenkurve ist Krümmungslinie der Fläche, wenn die Flächennormalen längs der Kurve eine Torse bilden.

Ist $\mathfrak{y}$ der Berührungspunkt mit der (im allgemeinen) von den Normalen umhüllten Raumkurve, so muß

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + R\xi \tag{47}$$

sein, wo R skalar ist; und $d\mathfrak{y}$ und ξ müssen linear abhängen oder es muß

$$d\mathfrak{x} + R\,d\xi = \lambda\xi \tag{48}$$

sein. Dieselbe Gleichung besteht auch in dem Sonderfall, wo die Torse ein Kegel oder Zylinder ist. Multipliziert man (48) skalar mit ξ, so folgt $\lambda = 0$. Die Formel (48) geht in die über, die die Franzosen nach *Olinde Rodrigues* (1816) zu benennen pflegen:

$$\boxed{d\mathfrak{x} + R\,d\xi = 0.} \tag{49}$$

Multipliziert man skalar mit $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$, so bekommt man nach (19) das gleichwertige Formelpaar (43). Daraus ergibt sich die Übereinstimmung mit der vorhergehenden Erklärung der Krümmungslinien und die Bedeutung von R und $\mathfrak{y}$.

Führen wir also das orthogonale Netz der Krümmungslinien als Parameterkurven $u, v =$ konst. ein, so muß zunächst $\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v = F = 0$ sein und nach (45) $ME = 0$, $MG = 0$, also, da E, F, G nicht alle verschwinden können $(EG - F^2 > 0)$, muß $M = 0$ sein.

$$F = M = 0 \tag{50}$$

ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Krümmungslinien Parameterkurven sind.

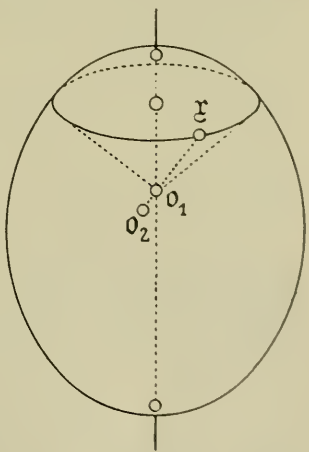


Fig. 15.

Auf einer Drehfläche kann man sofort die Krümmungslinien ermitteln. Es sind das nämlich die Parallelkreise und Meridiane der

Fläche; denn die aus den Normalen längs dieser Kurven gebildeten geradlinigen Flächen sind Torsen. Von den beiden zu einem Punkt einer Drehfläche gehörigen „Hauptkrümmungsmittelpunkten" ist der eine Krümmungsmittelpunkt des zugehörigen Meridians, der zweite liegt auf der Drehachse (Fig. 15). Letzteres kann man einsehen, wenn man bedenkt, daß die Normalenfläche längs des Parallels ein Drehkegel ist, oder auch mit Hilfe des Satzes von *Meusnier*.

§ 38. Nabelpunkte.

Nach (46) versagt die Differentialgleichung der Krümmungslinien immer dann, wenn die beiden Grundformen I, II sich nur um einen von $du:dv$ unabhängigen Faktor unterscheiden, wenn also nach (22) die Krümmungen aller Normalschnitte durch den Flächenpunkt übereinstimmen. Einen solchen Flächenpunkt nennt man *Nabel*. Eine Ebene und eine Kugel bestehen offenbar nur aus Nabelpunkten. Hier lassen sich alle Kurven als Krümmungslinien ansehen, was auch daraus hervorgeht, daß die Normalenflächen längs beliebiger Kurven auf diesen Flächen Zylinder oder Kegel, also Torsen sind.

Es fragt sich, ob die Kugeln (mit Einschluß der Ebenen) durch die Eigenschaft, nur Nabelpunkte zu enthalten, gekennzeichnet sind. Es seien $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ zwei Flächenpunkte; und zwar soll $\mathfrak{x}_2$ nicht auf der Flächennormalen von $\mathfrak{x}_1$ liegen. Durch die Flächennormale in $\mathfrak{x}_1$ und durch $\mathfrak{x}_2$ legen wir eine Ebene, die die Fläche in der Kurve $\mathfrak{C}$ durchsetzen möge. Da $\mathfrak{C}$ nach Voraussetzung eine Krümmungslinie ist, so bilden die Flächennormalen längs $\mathfrak{C}$ eine Torse, umhüllen also im allgemeinen eine Kurve $\mathfrak{C}^*$, die man nach § 18 als Evolute von $\mathfrak{C}$ zu bezeichnen hat. Da $\mathfrak{C}$ eben ist und die Ebene von $\mathfrak{C}$ eine Tangente der Evolute (nämlich die Flächennormale in $\mathfrak{x}_1$) enthält, so ist $\mathfrak{C}^*$ nach dem Endergebnis des § 18 ebenfalls eine ebene Kurve. Deshalb liegen irgend zwei Tangenten von $\mathfrak{C}^*$, also auch die Flächennormalen in $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ in einer Ebene. Dasselbe ist der Fall, wenn die Torse der Flächennormalen längs $\mathfrak{C}$ ein Kegel oder Zylinder ist.

Wir haben damit festgestellt, daß irgend zwei Flächennormalen unsrer Nabelfläche stets in einer Ebene liegen. Da aber alle Flächennormalen unmöglich derselben Ebene angehören können, so sind alle zu einer festen Richtung ξ parallel oder gehen alle durch einen festen Punkt $\mathfrak{y}$. Im ersten Fall $(d\mathfrak{x}\cdot\xi = 0)$ kommen wir zur Ebene, im zweiten zur Kugel; denn es ist

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + R\xi = \text{konst.} \tag{51}$$

Daraus folgt

$$d\mathfrak{x} + Rd\xi + \xi dR = 0$$

und andrerseits, da alle Flächenkurven nach (49) Krümmungslinien sind,

für jede Fortschreitungsrichtung auf unsrer Nabelfläche

$$d\mathfrak{x} + R\,d\xi = 0.$$

Demnach wird $dR = 0$. Somit ist R konstant und

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} - R\xi. \tag{52}$$

Also ist unsere Nabelfläche $(\mathfrak{x})$ tatsächlich eine Kugel um $\mathfrak{y}$ mit dem Halbmesser R. Damit ist gezeigt:

Die Kugeln mit Einschluß der Ebenen sind die einzigen nur aus Nabeln bestehenden Flächen.

§ 39. Satz von *Dupin* über Orthogonalsysteme.

Die Ermittlung der Krümmungslinien auf manchen Flächen (z. B. auf den Flächen zweiter Ordnung), also die Integration der Differentialgleichung (46) gelingt in besonderen Fällen mittels eines schönen Satzes von *Ch. Dupin*. Wir denken uns die Koordinaten x_k eines Punktes im Raum als Funktionen von drei Parametern dargestellt

$$x_k = x_k(u, v, w), \tag{53}$$

wofür wir zur Abkürzung wieder vektoriell

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v, w) \tag{54}$$

schreiben werden. Dann nennt man u, v, w „krummlinige Koordinaten" im Raum, wenn die Gleichungen (53) nach den u, v, w lösbar sind, d. h. wenn die Funktionaldeterminante der x_1, x_2, x_3 nach u, v, w nicht identisch verschwindet. Wir wollen nun insbesondere annehmen, je zwei Flächen $u, v, w =$ konst. sollen sich längs ihrer Schnittlinie senkrecht durchschneiden. Dann bilden die drei Flächenscharen ein *dreifaches Orthogonalsystem*.

Nehmen wir z. B. Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin\vartheta \cos\varphi, \\ x_2 &= r \sin\vartheta \sin\varphi, \\ x_3 &= r \cos\vartheta, \end{aligned}$$

so sind die Flächen $r =$ konst. konzentrische Kugeln. $\vartheta =$ konst. Drehkegel und $\varphi =$ konst. Ebenen. Diese drei Flächenscharen bilden ein dreifaches Orthogonalsystem. Als Bedingungen für ein Orthogonalsystem bekommen wir

$$\mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_w = 0, \quad \mathfrak{x}_w \mathfrak{x}_u = 0, \quad \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = 0, \tag{55}$$

wo z. B. $\mathfrak{x}_u$ den Vektor mit den Koordinaten $\partial x_k : \partial u$ bedeutet. Das Bogenelement $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ des Raumes nimmt bei einem dreifachen Orthogonalsystem die Gestalt an:

$$ds^2 = \mathfrak{x}_u^2\,du^2 + \mathfrak{x}_v^2\,dv^2 + \mathfrak{x}_w^2\,dw^2. \tag{56}$$

Es gilt nun folgender Satz aus *Ch. Dupins* Hauptwerk „Développements de géométrie“ (Paris 1813):

Die Flächen eines dreifachen Orthogonalsystems durchschneiden sich paarweise in Krümmungslinien.

Zum Beweise leiten wir die Gleichungen (55) der Reihe nach nach u, v, w ab. Das gibt

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{uv}\,\mathfrak{x}_w + \mathfrak{x}_{wu}\mathfrak{x}_v &= 0, \\ \mathfrak{x}_{vw}\,\mathfrak{x}_u + \mathfrak{x}_{uv}\,\mathfrak{x}_w &= 0, \\ \mathfrak{x}_{wu}\,\mathfrak{x}_v + \mathfrak{x}_{vw}\,\mathfrak{x}_u &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\mathfrak{x}_{uv}\,\mathfrak{x}_w = 0, \quad \mathfrak{x}_{vw}\,\mathfrak{x}_u = 0, \quad \mathfrak{x}_{wu}\,\mathfrak{x}_v = 0. \tag{57}$$

Da alle drei Vektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ und $\mathfrak{x}_{uv}$ auf $\mathfrak{x}_w$ senkrecht stehen, liegen sie in einer Ebene:

$$(\mathfrak{x}_{uv}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v) = 0. \tag{58}$$

Betrachten wir jetzt eine Fläche $w =$ konst., auf der die u, v *Gauß*ische Parameter bilden. Es ist $\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v = F = 0$, und nach der Erklärung (19) von M folgt aus (58) auch $M = 0$. $F = 0$, $M = 0$ war aber kennzeichnend für Krümmungslinien als Parameterlinien, w. z. b. w.

Ein nicht triviales Beispiel eines dreifachen Orthogonalsystems bilden die „konfokalen“ Flächen zweiter Ordnung. Beschränken wir uns auf den Fall der Mittelpunktsflächen, so kann man die Flächen des Orthogonalsystems mittels eines Parameters t in eine Gleichung zusammenfassen:

$$f(t) = \frac{x_1^2}{t-a_1} + \frac{x_2^2}{t-a_2} + \frac{x_3^2}{t-a_3} = 1. \tag{59}$$

Es sei $a_1 > a_2 > a_3 > 0$ und $x_k \neq 0$. Gibt man die x_k, so erhält man für t eine kubische Gleichung, von der man einsehen kann, daß sie nur reelle Wurzeln hat. Denn linker Hand steht in (59) bei festen x_k eine Funktion $f(t)$, die an den Stellen a_k von $-\infty$ nach $+\infty$ springt und im übrigen stetig ist. Nach dem Satze von *Bolzano* über stetige Funktionen muß es also tatsächlich drei reelle Nullstellen t_k von $f(t) - 1$ geben, und zwar auf den folgenden Teil strecken:

$$t_1 > a_1 > t_2 > a_2 > t_3 > a_3.$$

Somit gehen durch jeden Raumpunkt $(x_k \neq 0)$ drei reelle Flächen unseres Systems (59): ein Ellipsoid t_1, ein einschaliges Hyperboloid t_2 und ein zweischaliges t_3. Die t_k sind an Stelle der u, v, w als krummlinige Koordinaten verwendbar. Die Orthogonalität sieht man so ein. Die Flächennormale an die Fläche $t_i =$ konst. hat die Richtung

$$\frac{x_1}{t_i - a_1}, \quad \frac{x_2}{t_i - a_2}, \quad \frac{x_3}{t_i - a_3}. \tag{60}$$

Bilden wir das innere Produkt mit dem Normalenvektor der Fläche t_k, so erhalten wir

$$(61)\qquad \frac{x_1^2}{(t_i-a_1)(t_k-a_1)}+\frac{x_2^2}{(t_i-a_2)(t_k-a_2)}+\frac{x_3^2}{(t_i-a_3)(t_k-a_3)}.$$

Dieser Ausdruck ist aber Null; denn aus $f(t_i)=1$, $f(t_k)=1$ folgt $f(t_i)-f(t_k)=0$, was das Verschwinden von (61) ausdruckt. Darin ist die behauptete Orthogonalität enthalten.

Die Krümmungslinien der Flächen zweiter Ordnung sind also im allgemeinen Raumkurven vierter Ordnung, in denen sich je zwei konfokale Flächen durchdringen.

§ 40. Die winkeltreuen Abbildungen des Raumes.

Setzt man

$$y_k = y_k(x_1, x_2, x_3).$$

wo die y_k analytische Funktionen der x_k mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante sind, so erhält man, wenn man die x_k und y_k als rechtwinklige Koordinaten zweier Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ deutet, eine „Abbildung" oder „Punkttransformation" des Raumes. Bleiben bei dieser Abbildung die Winkel erhalten, so nennt man die Abbildung „winkeltreu" oder (nach *Gauß*) „konform". Triviale Beispiele solcher winkeltreuer Abbildungen sind die Ähnlichkeiten.

Ein nicht triviales Beispiel bildet die „*Inversion*"

$$(62)\qquad \mathfrak{y}=\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2}.$$

Entsprechende Punkte liegen dabei auf demselben Halbstrahl durch den Ursprung. Das Produkt ihrer Entfernungen vom Ursprung ist Eins:

$$(63)\qquad \mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2=1.$$

Die Einheitskugel (Inversionskugel) bleibt bei dieser Abbildung punktweise fest ($\mathfrak{x}=\mathfrak{y}$). Der Ursprung wird ins Unendliche befördert. Die Abbildung ist „involutorisch", da die Beziehung der Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ symmetrisch ist, also die Abbildung $\mathfrak{x}\to\mathfrak{y}$ mit der inversen $\mathfrak{y}\to\mathfrak{x}$ zusammenfällt. Man spricht daher auch von der „Spiegelung" an der Kugel $\mathfrak{x}^2=1$. Eine Gleichung von der Form

$$(64)\qquad A_0+A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3+A_4\mathfrak{y}^2=0$$

behält diese Gestalt:

$$(65)\qquad A_0\mathfrak{x}^2+A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4=0.$$

d. h. die Gesamtheit der Kugeln und Ebenen geht bei der Inversion in dieselbe Gesamtheit über. Wir wollen im folgenden die Ebenen immer mit zu den Kugeln rechnen.

Die Winkeltreue der Inversion kann entweder geometrisch aus der Invarianz der Kugeln oder wie im Folgenden durch Rechnung erwiesen werden. Aus (62) ergibt sich

$$d\mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{x}^2 d\mathfrak{x} - 2(\mathfrak{x} d\mathfrak{x})\mathfrak{x}}{(\mathfrak{x}^2)^2}, \tag{66}$$

$$d\mathfrak{y}^2 = \frac{d\mathfrak{x}^2}{(\mathfrak{x}^2)^2}, \qquad ds_{\mathfrak{y}} = \frac{ds_{\mathfrak{x}}}{\mathfrak{x}^2}. \tag{67}$$

Sind ξ und η Einheitstangentenvektoren in entsprechenden Punkten entsprechender Kurven

$$\xi = \frac{d\mathfrak{x}}{ds_{\mathfrak{x}}}, \qquad \eta = \frac{d\mathfrak{y}}{ds_{\mathfrak{y}}}, \tag{68}$$

so folgt aus (66) und (67)

$$\eta = \frac{\mathfrak{x}^2 \xi - 2(\mathfrak{x}\xi)\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2}. \tag{69}$$

Für ein zweites Paar entsprechender Kurven durch dasselbe Punktepaar $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ gilt ebenso

$$\bar{\eta} = \frac{\mathfrak{x}^2 \bar{\xi} - 2(\mathfrak{x}\bar{\xi})\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2} \tag{70}$$

und daraus

$$\eta\bar{\eta} = \xi\bar{\xi}, \tag{71}$$

worin die Winkeltreue enthalten ist.

Wir werden nun umgekehrt zeigen, daß aus der Winkeltreue die Invarianz der Kugeln folgt:

Satz von *Liouville*. *Jede winkeltreue räumliche Abbildung führt die Kugeln wieder in Kugeln über*[3]).

Zunächst folgt aus der Winkeltreue, daß ein dreifaches Orthogonalsystem bei konformer Abbildung wieder in ein solches übergeht. Daraus schließen wir:

Bei winkeltreuer Abbildung bleiben die Krümmungslinien erhalten.

Wir brauchen dazu nach *Dupin* nur zu zeigen, daß jede Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ in ein dreifaches Orthogonalsystem „eingebettet" werden kann. Wir nehmen die Krümmungslinien auf der Fläche als u, v-Kurven und setzen (ξ = Einheitsvektor der Flächennormalen)

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}(u, v) + w\xi(u, v), \tag{72}$$

dann bilden die geradlinigen Flächen (Torsen) u, v = konst. und die „Parallelflächen" w = konst. zur ursprünglichen Fläche ($w = 0$) ein solches System. Es ist nämlich

$$\bar{\mathfrak{x}}_u = \mathfrak{x}_u + w\xi_u, \qquad \bar{\mathfrak{x}}_v = \mathfrak{x}_v + w\xi_v, \qquad \bar{\mathfrak{x}}_w = \xi \tag{73}$$

---

[3]) *J. Liouville*, Note VI in *Monges* Application de l'Analyse, Paris 1850, S. 609—616.

oder nach *Olinde Rodrigues* (49)

$$\mathfrak{x}_u = \left(1 - \frac{w}{R_1}\right)\mathfrak{x}_u, \quad \mathfrak{x}_v = \left(1 - \frac{w}{R_2}\right)\mathfrak{x}_v, \quad \mathfrak{x}_w = \xi. \tag{74}$$

Die drei Vektoren sind parallel zu $\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \xi$, also tatsächlich paarweise senkrecht. Aus der Invarianz der Krümmungslinien folgt aber nach § 38 die behauptete Invarianz der Kugeln.

Der damit bewiesene Satz von *Liouville* läßt sich auch so fassen:

Jede winkeltreue Abbildung (die nicht ähnlich ist) läßt sich durch eine Aufeinanderfolge einer Inversion und einer Ähnlichkeit vermitteln.

Man zeigt es etwa auf folgende Weise. Es sei $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ eine vorgelegte winkeltreue Abbildung. Wir nehmen ein dreifaches Orthogonalsystem von Kugeln an, die durch einen Punkt $\mathfrak{x}_0$ hindurchgehen und hier drei paarweise zueinander senkrechte Ebenen berühren. Dieses Orthogonalsystem geht durch die vorgelegte Abbildung in ein ganz entsprechend wieder aus Kugeln aufgebautes Orthogonalsystem durch den entsprechenden Punkt $\mathfrak{y}_0$ über. Jetzt nehmen wir zwei Inversionen, von denen die eine $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}^*$ den Punkt $\mathfrak{x}_0$ ins Unendliche befördert ($\mathfrak{x}_0^* = \infty$), die andere $\mathfrak{y} \to \mathfrak{y}^*$ den Punkt $\mathfrak{y}_0$ ($\mathfrak{y}_0^* = \infty$). Von der so entstehenden Abbildung $\mathfrak{x}^* \to \mathfrak{y}^*$ läßt sich nun einsehen, daß sie eine Ähnlichkeit ist. Die beiden Kugelorthogonalsysteme sind durch die Inversion in Ebenenorthogonalsysteme (etwa $x_k^* = \text{konst.}$, $y_k^* = \text{konst.}$) übergeführt worden. Die Abbildung $\mathfrak{x}^* \to \mathfrak{y}^*$ hat also eine analytische Darstellung von der getrennten Form

$$y_k^* = y_k^*(x_k^*).$$

Ferner ist die Abbildung $\mathfrak{x}^* \to \mathfrak{y}^*$, die durch Zusammenfassung winkeltreuer Abbildungen entstanden ist, selbst winkeltreu, führt also die Kugelschar $\mathfrak{x}^{*2} = \text{konst.}$ in die Kugeln $\mathfrak{y}^{*2} = \text{konst.}$ über. Daraus schließt man aber leicht auf die Ähnlichkeit $\mathfrak{y}^* = \text{konst.} \cdot \mathfrak{x}^*$, womit die Behauptung erwiesen ist. Die eine der hier zum Beweis verwandten Inversionen kann man auch sparen, wenn man etwa $\mathfrak{x}_0$ gleich im Unendlichen wählt.

§ 41. *Gauß*ens sphärisches Abbild einer Fläche.

Denken wir uns, während ein Punkt $\mathfrak{x}(u, v)$ eine krumme Fläche beschreibt, den Einheitsvektor $\xi(u, v)$ der zugehörigen Flächennormalen vom Ursprung aus abgetragen, so ist der Endpunkt ξ dieses Vektors auf der Kugel $\xi^2 = 1$ beweglich. Die Fläche $(\mathfrak{x})$ ist so „durch parallele Normalen" auf die Einheitskugel (ξ) abgebildet. Man spricht vom sphärischen Abbild nach *Gauß*. Wir wollen nun ähnlich, wie wir beim Tangentenbild einer krummen Linie das Verhalten entsprechender Linienelemente festgestellt haben, jetzt beim „Normalenbild" er-

mitteln, wie sich entsprechende „Flächenelemente“ von $(\mathfrak{x})$ und (ξ) verhalten.

Die *Oberfläche* einer krummen Fläche erklärt man (zweiwertig) durch das Doppelintegral

$$\iint (\mathfrak{x}_u\,du,\ \mathfrak{x}_v\,dv,\ \xi) = \iint W\,du\,dv. \tag{75}$$

Das „Flächenelement“

$$do = (\mathfrak{x}_u\,du,\ \mathfrak{x}_v\,dv,\ \xi) \tag{76}$$

stellt man sich am einfachsten vor als „unendlich kleines Parallelogramm“ zwischen den Vektoren $\mathfrak{x}_u\,du$, $\mathfrak{y}_v\,dv$. Man kann leicht einsehen, daß die Erklärung (76) von der Parameterwahl unabhängig ist. Sind nämlich $\bar{u}, \bar{v}$ neue Parameter, so wird

$$\begin{aligned}\iint (\mathfrak{x}_{\bar{u}}\,\mathfrak{x}_{\bar{v}}\,\xi)\,d\bar{u}\,d\bar{v} &= \iint (\mathfrak{x}_u u_{\bar{u}} + \mathfrak{x}_v v_{\bar{u}},\ \mathfrak{x}_u u_{\bar{v}} + \mathfrak{x}_v v_{\bar{v}},\ \xi)\,d\bar{u}\,d\bar{v} \\ = \iint (\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\xi)\,(u_{\bar{u}} v_{\bar{v}} - u_{\bar{v}} v_{\bar{u}})\,d\bar{u}\,d\bar{v} &= \iint (\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\xi)\,du\,dv\end{aligned} \tag{77}$$

nach der bekannten Formel für die Einführung neuer Veränderlicher in ein Doppelintegral.

Das entsprechende Oberflächenelement der Einheitskugel ist

$$d\omega = (\xi_u\,du,\ \xi_v\,dv,\ \xi). \tag{78}$$

Nehmen wir als Parameterlinien etwa die Krümmungslinien und setzen $\mathfrak{x}_u\,du = d_1\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_v\,dv = d_2\mathfrak{x}$ und nach *Olinde Rodrigues* (§ 37 (49))

$$d_1\mathfrak{x} = -R_1 \cdot d_1\xi, \qquad d_2\mathfrak{x} = -R_2 \cdot d_2\xi,$$

so wird

$$\begin{aligned} do &= R_1 R_2\,(d_1\xi,\ d_2\xi,\ \xi) \\ &= R_1 R_2\,d\omega. \end{aligned} \tag{79}$$

Wir haben damit gefunden

$$\boxed{\frac{d\omega}{do} = \frac{1}{R_1 R_2} = K.} \tag{80}$$

Das *Gauß*ische Krümmungsmaß ist also gleich dem Quotienten entsprechender Flächenelemente von (ξ) und $(\mathfrak{x})$. Man kann hier wieder eine Bemerkung über das Vorzeichen machen. do und $d\omega$ haben einzeln willkürliches Zeichen, da wir aber in der Erklärung (76), (78) dieser Flächenelemente beidemal denselben Normalenvektor ξ verwendet haben, so sind diese Zeichen so aneinander gebunden, daß $d\omega : do > 0$ oder < 0 ist, je nachdem die Vektoren $\xi_u\,du, \xi_v\,dv, \xi$ ebenso aufeinander folgen wie die Vektoren $\mathfrak{x}_u\,du, \mathfrak{x}_v\,dv, \xi$ oder nicht, je nachdem also das sphärische Abbild „gleichsinnig“ oder „gegensinnig“ ist.

Man führt

$$\boxed{d\xi^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = III} \tag{81}$$

$$\boxed{e = \xi_u^2, \quad f = \xi_u \xi_v, \quad g = \xi_v^2} \tag{82}$$

gelegentlich als *dritte Grundform* ein. Die quadratischen Formen *I, II, III* sind aber linear abhängig. Aus den Fortschreitungen längs der Hauptrichtungen kann man jede andere Fortschreitungsrichtung auf unserer Fläche linear kombinieren:

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x} &= d_1\mathfrak{x} + d_2\mathfrak{x}, \\ d\xi &= d_1\xi + d_2\xi = -\left(\frac{d_1\mathfrak{x}}{R_1} + \frac{d_2\mathfrak{x}}{R_2}\right). \end{aligned} \tag{83}$$

Danach wird

$$\begin{aligned} I &= +d\mathfrak{x}^2 = d_1\mathfrak{x}^2 + d_2\mathfrak{x}^2, \\ II &= -d\mathfrak{x}\,d\xi = \frac{d_1\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{d_2\mathfrak{x}^2}{R_2}, \\ III &= +d\xi^2 = \frac{d_1\mathfrak{x}^2}{R_1^2} + \frac{d_2\mathfrak{x}^2}{R_2^2}. \end{aligned} \tag{84}$$

Wirft man aus den drei Gleichungen $d_1\mathfrak{x}^2$, $d_2\mathfrak{x}^2$ heraus, so folgt

$$\begin{vmatrix} I & 1 & 1 \\ II & \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} \\ III & \frac{1}{R_1^2} & \frac{1}{R_2^2} \end{vmatrix} = 0 \tag{85}$$

oder

$$\boxed{KI - 2HII + III = 0,} \tag{86}$$

wenn mit H wieder die mittlere Krümmung (31) bezeichnet wird. In (86) ist die behauptete lineare Abhängigkeit enthalten. Ausführlich schreibt sich diese Beziehung der drei Grundformen:

$$\begin{aligned} KE - 2HL + e &= 0, \\ KF - 2HM + f &= 0, \\ KG - 2HN + g &= 0. \end{aligned} \tag{87}$$

§ 42. Normalensysteme.

Es sei $\mathfrak{x}(u, v)$ eine Fläche. Durch jeden Punkt $\mathfrak{x}$ der Fläche legen wir eine Gerade, deren Richtung durch den Einheitsvektor $\eta(u, v)$ gegeben sei, also in Parameterdarstellung

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + w\eta. \tag{88}$$

Wann gibt es zu diesem System von Geraden, das von zwei Para-

metern u, v abhängt, eine orthogonale Fläche; wann bilden also diese Geraden das System der Normalen einer Fläche? Es sei $\mathfrak{y}(u, v)$ diese orthogonale Fläche. Dann brauchen wir nur $w(u, v)$ so zu bestimmen, daß $\eta \cdot d\mathfrak{y} = 0$ wird. Es ist

$$d\mathfrak{y} = (\mathfrak{x}_u + w\eta_u)\,du + (\mathfrak{x}_v + w\eta_v)\,dv + \eta\,dw. \tag{89}$$

Also gibt $\eta \cdot d\mathfrak{y} = 0$ die Bedingung, daß

$$-dw = \mathfrak{x}_u \eta\,du + \mathfrak{x}_v \eta\,dv \tag{90}$$

ein vollständiges Differential ist (man beachte, daß $\eta^2 = 1$ und daher $\eta\eta_u = \eta\eta_v = 0$). Somit folgt

$$(\mathfrak{x}_u \eta)_v = (\mathfrak{x}_v \eta)_u \tag{91}$$

oder

$$\mathfrak{x}_u \eta_v - \mathfrak{x}_v \eta_u = 0 \text{ [4]} \tag{92}$$

als notwendige und hinreichende Bedingung für ein Normalensystem. Aus (92) folgt für ein Normalensystem

$$\mathfrak{x}_u \eta_v + \mathfrak{x}_{uv}\eta = \mathfrak{x}_v \eta_u + \mathfrak{x}_{uv}\eta = (\mathfrak{x}_v \eta)_u = 0. \tag{93}$$

Nehmen wir orthogonale Parameterlinien auf unsrer Fläche, und zwar insbesondere so, daß

$$\mathfrak{x}_u \eta = 0 \tag{94}$$

wird, so liegen die drei Vektoren $\xi, \eta, \mathfrak{x}_v$ in einer Ebene, der „Einfallsebene" von η.

Bezeichnet man den „Einfallswinkel", d. h. den Winkel des Vektors η mit dem Normalenvektor ξ, durch φ, so kann die Bedingung (93) für ein Normalensystem auch so geschrieben werden

$$(\sqrt{\mathfrak{x}_v^2} \cdot \sin\varphi)_u = 0. \tag{95}$$

Verändert man daher die Lage des Strahls in seiner Einfallsebene, so daß an Stelle von φ (nach dem Brechungsgesetz) der Winkel $\bar{\varphi}$ vermöge der Gleichung

$$\sin\bar{\varphi} = n \sin\varphi, \qquad n = \text{konst.} \tag{96}$$

tritt, so gilt wiederum

$$(\sqrt{\mathfrak{x}_v^2}\sin\bar{\varphi})_u = n(\sqrt{\mathfrak{x}_v^2} \cdot \sin\varphi)_u = 0, \tag{97}$$

d. h. die gebrochenen Strahlen bilden wieder ein Normalensystem. Damit ist der Satz von *Malus* und *Dupin* bewiesen:

Werden die Strahlen eines Normalensystems an einer Fläche nach dem Gesetz (96) *von Snellius gebrochen, so bilden auch die gebrochenen Strahlen ein Normalensystem.*

---

[4]) Für $\xi = \eta$ ist das eine schon früher hergeleitete Formel § 33 (18).

Seine eigentliche Quelle hat dieser Satz allerdings nicht in der hier durchgeführten Rechnung, sondern in dem Prinzip von *Huyghens*. Die Spiegelung ($n = -1$) ist unter Brechung mit enthalten.

Auf die aus der Optik stammende Theorie der Strahlensysteme werden wir im 7. Kapitel eingehen.

§ 43. Asymptotenlinien.

Die Linien auf einer Fläche, längs derer die zweite quadratische Grundform verschwindet

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0 \tag{98}$$

nennt man „*Asymptotenlinien*“ oder gelegentlich auch „*Haupttangentenkurven*“ der Fläche. Die Tangenten an die Asymptotenlinien sind die Asymptoten oder Wendetangenten der Fläche. Der Normalschnitt durch eine solche Tangente hat dort einen Wendepunkt. Man spricht deshalb auch von „*Wendelinien*“ der Fläche. Die Differentialgleichung (98) läßt sich nach (19) ausführlich so schreiben:

$$(\mathfrak{x}_{uu}\,du^2 + 2\,\mathfrak{x}_{uv}\,du\,dv + \mathfrak{x}_{vv}\,dv^2,\quad \mathfrak{x}_u,\quad \mathfrak{x}_v) = 0. \tag{99}$$

Ist die Fläche hyperbolisch gekrümmt ($K < 0$, $LN - M^2 < 0$), so gehen durch jeden Flächenpunkt zwei reelle Asymptotenlinien hindurch. Die Tangenten an die Asymptotenlinien fallen mit den Asymptoten der Indikatrix von *Dupin* (vgl. § 34 (25)) zusammen, liegen also symmetrisch bezüglich der Hauptrichtungen der Fläche, die mit den Achsen der Indikatrix zusammenfallen. In parabolischen Flächenpunkten ($LN - M^2 = 0$) gibt es, wenn II nicht identisch verschwindet, nur eine Asymptotenrichtung. Im elliptischen Fall ($K > 0$, $LN - M^2 > 0$) werden die Asymptotenlinien imaginär.

Eine mehr geometrisch-anschauliche Erklärung der Asymptotenlinien ist die folgende:

Die Asymptotenlinien einer Fläche sind die Kurven auf der Fläche, deren Schmiegebenen gleichzeitig Tangentenebenen der Fläche sind.

In der Tat bedeutet

$$(\mathfrak{x}_{uu}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v) = 0, \tag{100}$$

daß die Schmiegebenen einer u-Kurve (d. h. $v = \text{konst.}$) gleichzeitig Tangentenebenen sind. Dann ist aber nach (19) $L = 0$, also tatsächlich für $dv = 0$ die Differentialgleichung (98) erfüllt. Ebenso auch umgekehrt.

In innigem Zusammenhang mit der Erklärung der Asymptotenrichtungen steht die der „konjugierten“ Richtungen. Zwei Richtungen $du : dv$ und $\delta u : \delta v$ auf der Fläche in einem Flächenpunkt u, v nennt man konjugiert, wenn sie durch die Asymptotenrichtungen in dem-

selben Punkt harmonisch getrennt werden. Es muß dann die „Polarenbildung“ der zweiten Grundform, nämlich

$$L\,du\,\delta u + M(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0 \tag{101}$$

verschwinden. Diese Beziehung (101) behält auch für $K > 0$ ihre reelle Bedeutung.

Nach (101) sind die Parameterlinien (du, $dv = 0$; $\delta u = 0$, δv) konjugiert, wenn $M = 0$ ist. Die Krümmungslinien bilden also ein Kurvennetz, das gleichzeitig orthogonal ($F = 0$) und konjugiert ist ($M = 0$).

Aus der geometrischen Deutung der Asymptotenlinien kann man leicht den Schluß ziehen, daß diese Kurven mit der Fläche nicht nur gegenüber Bewegungen, sondern gegenüber Kollineationen und Korrelationen invariant verbunden sind, eine Tatsache, auf die wir später noch zurückkommen werden. Entsprechendes gilt für konjugierte Richtungen.

Auf die geometrische Deutung der konjugierten Richtungen kommen wir bald zu sprechen (§ 45).

§ 44. Asymptotenlinien auf geradlinigen Flächen.

Die Ermittlung der Asymptotenlinien vereinfacht sich ein wenig für die Flächen, die von einer Schar geradliniger „Erzeugender“ bedeckt werden, also für die geradlinigen Flächen. Man kann eine solche Fläche stets so darstellen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(v) + \mathfrak{z}(v)\cdot u, \tag{102}$$

wobei etwa $\mathfrak{z}^2 = 1$ gewählt werden kann. Es folgt:

$$\mathfrak{x}_u = \mathfrak{z}, \qquad \mathfrak{x}_v = \mathfrak{y}_v + \mathfrak{z}_v u; \tag{103}$$

$$\mathfrak{x}_{uu} = 0, \qquad \mathfrak{x}_{uv} = \mathfrak{z}_v, \qquad \mathfrak{x}_{vv} = \mathfrak{y}_{vv} + \mathfrak{z}_{vv}\cdot u \tag{104}$$

und somit für die Asymptotenlinien nach (99)

$$(2\,\mathfrak{z}_v\,du\,dv + (\mathfrak{y}_{vv} + \mathfrak{z}_{vv}\,u)\,dv^2,\ \mathfrak{z},\ \mathfrak{y}_v + \mathfrak{z}_v\,u) = 0$$

oder

$$dv\cdot\{2\,(\mathfrak{z}_v\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{y}_v)\,du + (\mathfrak{y}_{vv} + \mathfrak{z}_{vv}\,u,\ \mathfrak{z},\ \mathfrak{y}_v + \mathfrak{z}_v\,u)\,dv\} = 0. \tag{105}$$

Das Verschwinden des ersten Faktors ($dv = 0$) ergibt die Schar der geradlinigen Erzeugenden.

Der Klammerausdruck gleich Null gesetzt, ergibt eine zweite, die Fläche einfach bedeckende Schar von Asymptotenlinien. Ist

$$(\mathfrak{z}_v\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{y}_v) \neq 0, \tag{106}$$

so hat die entstehende Differentialgleichung die Form

$$\frac{du}{dv} = Pu^2 + 2Qu + R, \tag{107}$$

wo P, Q und R nur von v abhängen. Man pflegt eine solche Differentialgleichung nach dem italienischen Geometer *J. Riccati* zu benennen. Aus der Form dieser Gleichung kann man leicht ablesen, daß vier Lösungen $u_k(v)$; $k = 1, 2, 3, 4$ festes, d. h. von v unabhängiges Doppelverhältnis besitzen:

$$D = \frac{u_1 - u_3}{u_2 - u_3} : \frac{u_1 - u_4}{u_2 - u_4} = \text{konst.} \tag{108}$$

Dazu braucht man nur zu zeigen, daß

$$\frac{d}{dv} \lg D = \frac{u_1' - u_3'}{u_1 - u_3} - \frac{u_2' - u_3'}{u_2 - u_3} - \frac{u_1' - u_4'}{u_1 - u_4} + \frac{u_2' - u_4'}{u_2 - u_4} \tag{109}$$

verschwindet. In der Tat erhält man unter Benutzung der Gleichung (107) z. B.

$$\frac{u_1' - u_3'}{u_1 - u_3} = P(u_1 + u_3) + 2Q.$$

Daraus folgt die Richtigkeit von (109).

Geometrisch bedeutet unser Ergebnis, daß die neue Schar von Asymptotenlinien die alte Schar, also die geradlinigen Erzeugenden, nach festen Doppelverhältnissen durchsetzt. Sind beide Scharen von Asymptotenlinien geradlinig, so erhält man geradlinige Flächen zweiter Ordnung, deren bekannte Eigenschaften man hier bestätigt findet.

Es bleibt noch der ausgeschlossene Sonderfall zu berücksichtigen, daß

$$(\mathfrak{z}_v \mathfrak{z} \mathfrak{y}_v) = 0 \tag{110}$$

identisch verschwindet. (103) ergab

$$\mathfrak{x}_u = \mathfrak{z}, \qquad \mathfrak{x}_v = \mathfrak{y}_v + \mathfrak{z}_v u. \tag{111}$$

Diese Vektoren liegen für alle u in einer Ebene, wenn nach (110) $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}_v$ und $\mathfrak{z}_v$ in einer Ebene liegen. Die Bedingung (110) bedeutet also, daß beim Fortschreiten längs einer Erzeugenden unserer Fläche die Tangentenebene der Fläche sich nicht um die Erzeugende dreht, sondern fest bleibt.

Eine geradlinige Fläche, die längs jeder Erzeugenden von einer festen Ebene berührt wird, soll eine „Torse" heißen.

Die für $(\mathfrak{z}_v \mathfrak{z} \mathfrak{y}_v) = 0$ nur von v abhängigen Tangentenebenen bilden nämlich im allgemeinen die Schmiegebene einer Raumkurve oder die Tangentenebenen eines Kegels oder Zylinders. Damit ist die Übereinstimmung der eben aufgestellten Erklärung der Torsen mit der in § 37 hergestellt. Die durch (106) gekennzeichneten allgemeineren geradlinigen Flächen nennt man *„windschief"*.

§ 45. Konjugierte Netze.

Die konjugierten Richtungen auf einer Fläche lassen folgende geometrische Deutung zu. Gehen wir von einer Flächenkurve aus, und betrachten wir die Torse, die von den Tangentenebenen der Fläche in den Punkten der Kurve umhüllt wird! Die Erzeugenden dieser, der Fläche längs unserer Kurve umschriebenen Torse sind zu den Tangenten der Kurve konjugiert. Das können wir etwa so einsehen. Ist $\mathfrak{y}$ ein in der Tangentenebene beweglicher Punkt, $\mathfrak{x}$ der Berührungspunkt und ξ der Vektor der Flächennormalen in $\mathfrak{x}$, so ist die Gleichung der Tangentenebene

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{x})\,\xi = 0. \tag{112}$$

Schreiten wir längs unserer Flächenkurve fort, so ergibt sich nach der bekannten Regel für die Einhüllende dieser Tangentenebenen die zweite Gleichung

$$-\,d\mathfrak{x}\cdot\xi + (\mathfrak{y} - \mathfrak{x})\,d\xi = 0, \tag{113}$$

oder, da das erste Glied wegfällt, — wenn man noch $\mathfrak{y} - \mathfrak{x} = \delta\mathfrak{x}$ setzt —

$$\delta\mathfrak{x}\cdot d\xi = 0. \tag{114}$$

Ausführlich geschrieben nach (19)

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{x}_u\,\delta u + \mathfrak{x}_v\,\delta v)\cdot(\xi_u\,du + \xi_v\,dv)\\ &= -\left\{L\,du\,\delta u + M(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v\right\} = 0.\end{aligned}$$

Das ist genau unsre Bedingung (101) für konjugierte Richtungen.

Diese Konstruktion konjugierter Richtungen gestattet, auf jeder Fläche ein Netz konjugierter Kurven herzustellen. Es läßt sich nämlich die Beziehung zwischen Parallelkreisen und Meridianen so verallgemeinern: Die Berührungslinien aller Kegel, die einer Fläche umschrieben sind, und deren Spitzen auf einer Geraden liegen, bilden zusammen mit den Schnittlinien der Fläche mit den Ebenen durch dieselbe Gerade ein konjugiertes Netz auf der Fläche.

Dafür, daß die Parameterlinien ein konjugiertes Netz bilden, hatten wir die Bedingung $M = 0$ oder

$$(\mathfrak{x}_{uv}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v) = 0 \tag{115}$$

in § 43 abgeleitet. Diese letzte Bedingung (115) ist sicher erfüllt, wenn $\mathfrak{x}_{uv} = 0$ ist, wenn also $\mathfrak{x}$ die Gestalt hat

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u) + \mathfrak{z}(v). \tag{116}$$

Solche Flächen, die besonders von *S. Lie* studiert worden sind, nennt man „*Schiebflächen*“ oder „*Translationsflächen*“, da sie durch Parallel-

verschiebung einerseits der Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u)$, andrerseits der Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{z}(v)$ erzeugt werden können. Auch die Sehnenmittenfläche einer Raumkurve

$$\mathfrak{x} = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{y}(u) + \mathfrak{y}(v)\} \tag{117}$$

gehört zu den Schiebflächen.

§ 46. Ableitungsformeln von *Weingarten*.

Will man einen tieferen Einblick in die Flächentheorie gewinnen, so muß man, den Formeln *Frenets* in der Kurventheorie entsprechend, die Ableitungen der Vektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, ξ nach u, v aus diesen Vektoren selbst linear zusammensetzen. Im Hinblick auf die Asymptotenlinien wollen wir mit ξ_u, ξ_v den Anfang machen.

Aus $\xi^2 = 1$ folgt $\qquad \xi\xi_u = \xi\xi_v = 0,$

also haben wir

$$\begin{aligned} \xi_u &= a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v, \\ \xi_v &= c\mathfrak{x}_u + d\mathfrak{x}_v. \end{aligned} \tag{118}$$

Multipliziert man skalar mit $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, so folgt nach (19)

$$\begin{aligned} -L &= aE + bF, \quad -M = cE + dF, \\ -M &= aF + bG, \quad -N = cF + dG. \end{aligned} \tag{119}$$

Berechnet man daraus a, b, c, d, so erhält man durch Einsetzen der gefundenen Werte in die vorhergehenden Formeln die gewünschten Gleichungen, die von *J. Weingarten* (1861) angegeben worden sind.

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_u &= \frac{(FM - GL)\mathfrak{x}_u + (FL - EM)\mathfrak{x}_v}{EG - F^2}, \\ \xi_v &= \frac{(FN - GM)\mathfrak{x}_u + (FM - EN)\mathfrak{x}_v}{EG - F^2}. \end{aligned}} \tag{120}$$

Hieraus kann man leicht einige Schlüsse ziehen; z. B. kann man neuerdings die Formel (86) von § 41 bestätigen. Ferner sieht man jetzt leicht ein: *Sind auf einer Fläche alle Kurven Asymptotenlinien, so ist die Fläche eben.*

Aus (98) $L = M = N = 0$ folgt nämlich wegen (120) $\xi_u = \xi_v = 0$ oder $\xi = \text{konst.}$ $d\mathfrak{x} \cdot \xi = 0$ ergibt durch Integration $\mathfrak{x}\xi + \text{konst} = 0$. also wirklich die Gleichung einer Ebene.

Ferner: *Die Torsen sind die einzigen Flächen mit lauter Punkten parabolischer Krümmung* ($K = 0$).

Ist nämlich $LN - M^2 = 0$, so wird die Differentialgleichung der Asymptotenlinien (98)

$$II = (\sqrt{L} \cdot du + \sqrt{N} \cdot dv)^2 = 0,$$

wo

$$\sqrt{L} \cdot \sqrt{N} = M \tag{121}$$

ist. Es gibt also nur eine Schar von Asymptotenlinien, die die Fläche schlicht überdeckt (wenn wir den Fall des identischen Verschwindens von II jetzt ausschließen). Wählen wir diese Kurven als Parameterlinien $v =$ konst., so wird $L = M = 0$ und nach *Weingarten* $\xi_u = 0$. Somit ist

$$\mathfrak{x}_u \xi = (\mathfrak{x}\,\xi)_u = 0 \tag{122}$$

oder

$$\mathfrak{x} \cdot \xi(v) = p(v). \tag{123}$$

Die Ableitung nach v ergibt

$$\mathfrak{x}\,\xi_v = p_v. \tag{124}$$

Also ist unsre Fläche die Einhüllende der Ebenenschar (123), d. h. wirklich eine Torse. Umgekehrt kann man für eine Torse, etwa nach (105), immer $L = M = 0$ erreichen. Somit sind die Torsen durch die Identität $K = 0$ gekennzeichnet.

§ 47. Satz von *Beltrami* und *Enneper* über die Windung der Asymptotenlinien.

Da die Schmiegebenen einer Asymptotenlinie auf einer Fläche mit den Tangentenebenen der Fläche übereinstimmen, fallen die Binormalen der Kurve mit den Flächennormalen zusammen ($\xi_3 = \xi$). Deshalb läßt sich die Windung einer Asymptotenlinie leicht berechnen:

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 = \frac{d\xi_3^{\,2}}{d\mathfrak{x}^2} = \frac{d\xi^2}{d\mathfrak{x}^2} = \frac{III}{I}. \tag{125}$$

Nach § 41 (86) war

$$K\,I - 2\,H\,II + III = 0.$$

Da längs einer Asymptotenlinie $II = 0$ ist, so folgt

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 = \frac{III}{I} = -K. \tag{126}$$

Diesen Zusammenhang zwischen der Windung der Asymptotenlinien und dem *Gauß*ischen Krümmungsmaß der Fläche haben *E. Beltrami*[5]) (1866) und *A. Enneper* (1870) angegeben. Auf geradlinige Asymptotenlinien ist die Formel nicht ohne weiteres anwendbar.

Über das Vorzeichen der Windung läßt sich durch eine genauere Untersuchung feststellen, daß die Windungen der beiden durch einen

[5]) *E. Beltrami*, Opere matematiche I (1902), S. 301.

Flächenpunkt gehenden Asymptotenlinien entgegengesetztes Vorzeichen haben. Man kann sich das leicht dadurch veranschaulichen, daß man die Fläche an einer zu dem betreffenden Flächenpunkt $\mathfrak{x}_0$ gehörigen Hauptnormalebene spiegelt. Dabei ist unter „Hauptnormalebene" eine Normalebene durch eine der beiden Hauptrichtungen des Flächenpunkts $\mathfrak{x}_0$ verstanden. Durch diese Spiegelung erhält man nämlich eine neue Fläche, die mit der alten an der Stelle $\mathfrak{x}_0$ eine Berührung „zweiter Ordnung" hat. Eine Asymptotenlinie der ursprünglichen Fläche durch $\mathfrak{x}_0$ hat einerseits dieselbe Windung wie die sie in $\mathfrak{x}_0$ berührende Asymptotenlinie der gespiegelten Fläche. Andrerseits ist diese Kurve in $\mathfrak{x}_0$ entgegengesetzt gewunden zu der ihr durch Spiegelung entsprechenden zweiten Asymptotenlinie der ursprünglichen Fläche. Darin ist das gewünschte Ergebnis enthalten.

§ 48. Die Ableitungsformeln von *Gauß*.

In § 46 hatten wir begonnen, das flächentheoretische Gegenstück der Kurvenformeln von *Frenet* abzuleiten. Damit wollen wir jetzt fortfahren. Es muß sich z. B. $\mathfrak{x}_{uu}$ in der Form darstellen lassen

$$\mathfrak{x}_{uu} = A\,\mathfrak{x}_u + B\,\mathfrak{x}_v + C\,\xi. \tag{127}$$

Es bleiben die Faktoren A, B, C zu berechnen. Aus $\mathfrak{x}_u\,\xi = 0$ folgt durch Ableitung nach u zunächst wegen (19)

$$C = \mathfrak{x}_{uu}\,\xi = -\,\mathfrak{x}_u\,\xi_u = L. \tag{128}$$

Ferner ist nach (127)

$$(\mathfrak{x}_{uu}\,\mathfrak{x}_v\,\xi) = A\,(\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\xi), \tag{129}$$

oder, wenn man beiderseits mit $(\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\xi) = W$ nach dem Multiplikationssatz für Determinanten (§ 3 (41)) multipliziert, unter Benutzung der Formeln (35) bis (40) von § 36

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}E_u & F & 0 \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & G & 0 \\ * & 0 & 1 \end{vmatrix} = A\,W^2. \tag{130}$$

Daraus ist

$$A = \frac{GE_u - 2\,FF_u + FE_v}{2\,W^2}. \tag{131}$$

Ebenso erhält man

$$(\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_{uu}\,\xi) = B\,(\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\xi), \tag{132}$$

$$\begin{vmatrix} E & \frac{1}{2}E_u & 0 \\ F & F_u - \frac{1}{2}E_v & 0 \\ 0 & * & 1 \end{vmatrix} = B\,W^2. \tag{133}$$

$$B = \frac{-\,FE_u + 2\,EF_u - EE_v}{2\,W^2}. \tag{134}$$

Fährt man so fort, so erhält man schließlich das Formelsystem, durch das sich $\mathfrak{x}_{uu}$, $\mathfrak{x}_{uv}$, $\mathfrak{x}_{vv}$ aus $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, ξ aufbauen. In diesem *Gauß*ischen Formelsystem wollen wir die Faktoren gleich in der etwas verwickelten, von *Christoffel* herrührenden Bezeichnung schreiben:

$$(135)\qquad \boxed{\begin{aligned} \mathfrak{x}_{uu} &= \left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_u + \left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_v + L\,\xi, \\ \mathfrak{x}_{uv} &= \left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_u + \left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_v + M\,\xi, \\ \mathfrak{x}_{vv} &= \left\{\begin{matrix}2&2\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_u + \left\{\begin{matrix}2&2\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_v + N\,\xi. \end{aligned}}$$

In diesen Ableitungsformeln von *Gauß* haben die „*Dreizeigersymbole*“ *Christoffel*s folgende Werte

$$(136)\qquad \boxed{\begin{aligned} \left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\} &= \frac{+GE_u - 2FF_u + FE_v}{2W^2}, & \left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\} &= \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2W^2}, \\ \left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\} &= \frac{GE_v - FG_u}{2W^2}, & \left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\} &= \frac{EG_u - FE_v}{2W^2}, \\ \left\{\begin{matrix}2&2\\1\end{matrix}\right\} &= \frac{-FG_v + 2GF_v - GG_u}{2W^2}, & \left\{\begin{matrix}2&2\\2\end{matrix}\right\} &= \frac{+EG_v - 2FF_v + FG_u}{2W^2}. \end{aligned}}$$

Wir wollen die Formeln (135) auf die Einheitskugel selbst anwenden, indem wir ξ an Stelle $\mathfrak{x}$ treten lassen und für ξ wieder ξ setzen (§ 32 (12)). Dann tritt an die Stelle von

$$I = d\mathfrak{x}^2 \quad \text{und} \quad II = -\,d\mathfrak{x}\cdot d\xi \quad \text{entsprechend}$$
$$III = d\xi^2 \quad \text{und} \quad -III = -\,d\xi^2$$

und die Formeln (135) gehen über in

$$(137)\qquad \begin{aligned} \xi_{uu} &= \left\{\begin{matrix}1&1\\1\end{matrix}\right\}_{III}\xi_u + \left\{\begin{matrix}1&1\\2\end{matrix}\right\}_{III}\xi_v - e\,\xi, \\ \xi_{uv} &= \left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}_{III}\xi_u + \left\{\begin{matrix}1&2\\2\end{matrix}\right\}_{III}\xi_v - f\,\xi, \\ \xi_{vv} &= \left\{\begin{matrix}2&2\\1\end{matrix}\right\}_{III}\xi_u + \left\{\begin{matrix}2&2\\2\end{matrix}\right\}_{III}\xi_v - g\,\xi. \end{aligned}$$

Hier sind die Dreizeigersymbole bezüglich der dritten Grundform (81) zu berechnen, so daß z. B.

$$\left\{\begin{matrix}1&2\\1\end{matrix}\right\}_{III} = \frac{1}{2}\,\frac{ge_v - fg_u}{eg - f^2}$$

bedeutet.

§ 49. Grundformeln von *Gauß* und *Codazzi*.

Die Abhängigkeit, die zwischen den sechs zu einer Fläche gehörigen Funktionen $E, F, G; L, M, N$ besteht, kann man aus den *Gauß*schen Ableitungsformeln ermitteln, wenn man die Vektoren $\mathfrak{x}_{uuv}$, $\mathfrak{x}_{uvv}$ auf zwei verschiedene Arten berechnet. Setzt man

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}_{uu}) - \frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}_{uv}) = \alpha_1 \mathfrak{x}_u + \beta_1 \mathfrak{x}_v + \gamma_1 \mathfrak{x},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}_{uv}) - \frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}_{vv}) = \alpha_2 \mathfrak{x}_u + \beta_2 \mathfrak{x}_v + \gamma_2 \mathfrak{x},$$

so müssen die sechs Größen α, β, γ einzeln verschwinden. Das gibt durch eine etwas umfangreiche Rechnung drei Gleichungen zwischen den $E, F, G; L, M, N$. Aus $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$ entspringt nämlich dieselbe *Grundformel von Gauß*, die besagt, daß sich das Krümmungsmaß

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

allein durch die erste Grundform ausdrücken läßt. Diese Formel, die wir in § 36 in einer von *R. Baltzer* angegebenen Gestalt geschrieben hatten, läßt sich nach *G. Frobenius* übersichtlich auch in folgende (nur scheinbar irrationale) Form bringen

$$(138)\qquad \boxed{K = -\frac{1}{4W^4}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2W}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\frac{E_v - F_u}{W} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{F_v - G_u}{W}\right\}.}$$

Die Gleichungen $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ liefern hingegen etwas Neues, nämlich zwei Formeln, die auf *G. Mainardi* (1857) und *D. Codazzi* (1868) zurückgehen. Man kann diese Formeln in einer von *E. Study* angegebenen Art übersichtlich so anordnen:

$$(139)\qquad \boxed{\begin{aligned} &(EG - 2FF + GE)(L_v - M_u) \\ &-(EN - 2FM + GL)(E_v - F_u) \end{aligned} + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0,}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &(EG - 2FF + GE)(M_v - N_u) \\ &-(EN - 2FM + GL)(F_v - G_u) \end{aligned} + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = 0.}$$

Durch die Beziehungen (138), (139) sind die Abhängigkeiten zwischen den beiden Grundformen *I*, *II* erschöpft, worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll. Anwendungen der Grundformeln von *Gauß* und *Codazzi* werden wir später wiederholt zu machen haben.

§ 50. *G. Monge.*

Die heutige Differentialgeometrie geht, wenn wir von Vorläufern wie *Euler* absehen, im wesentlichen auf zwei Quellen zurück, einerseits auf *Monge* (1746—1818) und seine Schüler und andrerseits auf *Gauß* (1777—1855). Die beiden Hauptwerke sind: von *Monge* das Lehrbuch „Application de l'Analyse à la Géométrie" (von 1795 an erschienen), von *Gauß* die Abhandlung „Disquisitiones circa superficies curvas" (1827). Beide Werke haben ein völlig verschiedenes Gepräge. Bei *Monge* handelt es sich um eine Sammlung von einzelnen Problemen, um eine Reihe von Untersuchungen über besondere, in den Anwendungen häufig vorkommende Flächenfamilien. Die Darstellung ist den Lehrzwecken angepaßt und leicht lesbar. Bei *Gauß* hingegen handelt es sich um eine einheitliche und tiefe, aber auch um eine etwas unnahbare Theorie. Beiden Werken gemeinsam ist der innige Zusammenhang mit praktischen Dingen. Die Gegensätze sind in den Persönlichkeiten der beiden Mathematiker begründet. *Monge* war ein höchst erfolgreicher Lehrer und glänzender Organisator, der mitten im Getriebe der Politik stand, zuerst als überradikaler „Königsmörder", später als Monarchist und treuer Anhänger des großen *Napoleon*. *Gauß* hat ein einsames und stilles Gelehrtenleben, in recht engen Verhältnissen geführt. Er hat seinen allerdings elementaren Unterricht als Last empfunden, sich um Politik kaum gekümmert und vom Staate nur gefordert, daß er ihm die Möglichkeit ungestörten Schaffens gäbe.

Monge lehrte zunächst in der Kriegsschule zu Mézières und hat dort den Unterricht in darstellender Geometrie ausgebildet. In der schlimmsten Umwälzung zur Zeit des größten Valutaelends wurde 1794 in Paris die École Polytechnique gegründet, wie *Jacobi* sagt „eine Schule ohne Vorbild und ohne Nachbild in Europa"[6]), und zwar als ein militärisches Internat. Revolutionszeiten, in denen man viel vom ewigen Frieden redet, sind ja dem Emporkommen neuer militärischer Einrichtungen immer günstig gewesen. *Monge* war als Lehrer und Organisator die treibende Kraft dieser Offiziersschule, und er erreichte, daß die Geometrie zum Mittelpunkt ihres unglaublich intensiven Lehrbetriebes wurde. Die bedeutendsten Mathematiker wurden an die Schule berufen. Durch die Veröffentlichungen der Vorlesungen reichte die Wirksamkeit ihres Unterrichts über die Grenzen Frankreichs hinaus. So ist von *Monge* außer dem genannten Werk über Differentialgeometrie besonders noch sein Lehrgang der darstellenden Geometrie, der ebenfalls 1795 zu erscheinen begonnen hat, berühmt geworden.

---

[6]) *C. G. J. Jacobi*, Werke VII, S. 356.

Der außerordentlich anregenden Lehrbegabung von *Monge* gelang es, eine geometrische „Schule" zu begründen, der vor allem *Ch. Dupin* (1784—1873) angehört, dessen Name in diesem Kapitel wiederholt genannt wurde. Während bei *Monge* die geometrische Anschauung und die Handhabung der analytischen Rechenverfahren noch aufs innigste verknüpft sind, tritt bei dem zweiten großen „Schüler" von *Monge*, *J. V. Poncelet* (1788—1867), dem Begründer der projektiven Geometrie, eine völlige Loslösung eines Zweiges der Geometrie von der Analysis ein, die auch heute noch nicht ganz überwunden ist. Die Arbeiten aus der Schule von *Monge* sind größtenteils in *Gergonnes* „Annales des mathématiques pures et appliquées" (Nîmes 1810—1831), der ersten rein mathematischen Zeitschrift, veröffentlicht.

Von den äußeren Lebensschicksalen von *Monge* sei noch erwähnt, daß er während der Revolution Marineminister war, in nahen Beziehungen zu *Napoleon* stand, mit ihm den ersten italienischen Feldzug und das ägyptische Abenteuer mitgemacht hat. Den Sturz seines Kaisers hat *Monge* nicht lange überlebt.

§ 51. Aufgaben und Lehrsätze.

1. **Ein duales Gegenstück zum Satz von *Meusnier*.** Ein Drehkegel, der mit einer Torse drei benachbarte Tangentenebenen gemein hat, soll „Krümmungskegel der Torse" heißen. Es sei nun $\mathfrak{T}$ eine Tangente einer Fläche $\mathfrak{F}$. Der Berührungspunkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{F}$ sei kein parabolischer Punkt von $\mathfrak{F}$. Wir denken von den Punkten von $\mathfrak{T}$ aus der Fläche $\mathfrak{F}$ Kegel umbeschrieben und die zur Erzeugenden $\mathfrak{T}$ gehörigen Krümmungskegel dieser Kegel ermittelt. Alle diese Drehkegel umhüllen dann eine Kugel, die $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{p}$ berührt. *B. Hostinský*, Nouvelles Annales de mathématiques (4) **9** (1909), S. 399—403; *E. Müller*, Wiener Berichte 1917, S. 311—318.

2. **Ein duales Gegenstück zum Satz von *Euler* über die Krümmungen der Normalschnitte.** Es sei r der Krümmungshalbmesser des Normalquerschnittes eines Zylinders, der eine Fläche $\mathfrak{F}$ in einem nichtparabolischen Punkt $\mathfrak{p}$ berührt und φ der Winkel der Zylindererzeugenden mit einer Hauptrichtung von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{p}$. Bei festem $\mathfrak{p}$ drückt sich dann die Abhängigkeit von r und φ so aus:

$$r = r_1 \cos^2\varphi + r_2 \sin^2\varphi. \tag{140}$$

W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 118.

3. **Satz von *O. Terquem* über den Durchschnitt zweier Flächen längs einer gemeinsamen Krümmungslinie.** Aus dem, was in § 18 über die Evoluten einer Kurve hergeleitet wurde, kann man für die Krümmungslinien folgende Beziehung gewinnen. Zwei Flächen $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$

mögen sich längs einer Kurve $\mathfrak{C}$ schneiden. Es sei a) der Schnittwinkel von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ längs $\mathfrak{C}$ fest, b) es sei $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{F}_1$ Krümmungslinie, und es sei c) $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{F}_2$ Krümmungslinie. Dann folgt stets aus zwei dieser Voraussetzungen a) b) c) die dritte. *O. Terquem*, Nouvelles Annales de mathématiques **9**, 1852, S. 402.

4. **Ein von *Beltrami* angegebenes duales Gegenstück zum Satz von *Terquem*.** Eine Ebene $\mathfrak{E}$ rolle auf zwei krummen Flächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$; a) die Entfernung entsprechender Berührungspunkte von $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ sei fest, b) der Ort der Berührungspunkte auf $\mathfrak{F}_1$ sei Krümmungslinie von $\mathfrak{F}_1$, c) der Ort der Berührungspunkte auf $\mathfrak{F}_2$ sei Krümmungslinie von $\mathfrak{F}_2$. Aus zwei dieser Annahmen folgt die dritte. *E. Beltrami* 1864, Opere I, S. 130.

5. ***Darboux*s Umkehrung des Satzes von *Dupin* (1866).** Hat man zwei Scharen von Flächen, die sich in Kurven senkrecht durchsetzen, die auf der einen Flächenschar Krümmungslinien sind, so läßt sich eine dritte Flächenschar finden, die die beiden ersten zu einem dreifachen Orthogonalsystem ergänzt. *G. Darboux*, Leçons sur les systèmes orthogonaux . . ., 2. Aufl., Paris 1910, S. 10.

6. **Ein Satz von *Beltrami* über koaxiale Drehflächen.** Zu einer Schar von Drehflächen, die aus einer von ihnen durch Verschiebung längs der Achse entsteht, werde eine neue koaxiale Drehfläche konstruiert, die die Flächen der Schar senkrecht durchschneidet. Das Krümmungsmaß der neuen Fläche in einem Punkt ist dann entgegengesetzt gleich dem Krümmungsmaß der durch diesen Punkt hindurchgehenden Fläche der Schar. *E. Beltrami*, 1864, Opere I, S. 200.

7. **Parallelflächen.** Geht man von einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ dadurch zu einer Parallelfläche über, daß man längs der Flächennormalen das feste Stück n abträgt ($\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + n\,\xi$), so erhält man für das Krümmungsmaß $\bar{K}$ und die mittlere Krümmung $\bar{H}$ dieser Parallelfläche die Ausdrücke

$$\bar{K} = \frac{K}{1 - 2\,nH + n^2 K}, \qquad \bar{H} = \frac{H - nK}{1 - 2\,nH + n^2 K}. \tag{141}$$

Zwischen zusammengehörigen Normalen und Hauptkrümmungshalbmessern bestehen die Beziehungen

$$\bar{\xi} = \xi, \qquad \bar{R}_1 = R_1 - n, \quad \bar{R}_2 = R_2 - n. \tag{142}$$

Führt man das zuerst von *J. Steiner* und später besonders von *H. Minkowski* betrachtete Integral der mittleren Krümmung

$$M = \int H\,do \tag{143}$$

ein, so ist z. B. (O = Oberfläche)

$$M^2 - 4\pi O \tag{144}$$

invariant gegenüber dem Übergang zur Parallelfläche. Weitere Invarianten bei *H. Liebmann*, Münchener Berichte 1918, S. 489–505.

Man vergleiche dazu den § 76 und die Aufgabe 1 in § 102.

8. **Über die Krümmung der Asymptotenlinien.** Der Krümmungshalbmesser einer Asymptotenlinie in einem Punkt $\mathfrak{x}$ ist gleich 2 : 3 des Krümmungshalbmessers des die Asymptotenlinie berührenden Astes der Schnittkurve zwischen der Fläche und der Tangentenebene in $\mathfrak{x}$. *E. Beltrami* 1865, Opere I, S. 255.

9. **Kanonische Reihenentwicklung.** Entwickelt man die Gleichung einer krummen Fläche in der Form

$$x_3 = \tfrac{1}{2}(a_0 x_1^2 + a_1 x_2^2) + \tfrac{1}{6}(b_0 x_1^3 + 3 b_1 x_1^2 x_2 + 3 b_2 x_1 x_2^2 + b_3 x_2^3) + \cdots, \tag{145}$$

so hängen die Werte der Koeffizienten mit den Hauptkrümmungshalbmessern im Ursprung so zusammen

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{1}{R_1}, \quad a_1 = \frac{1}{R_2}; \\ b_0 = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{R_1}, \quad b_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{R_1}, \quad b_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{R_2}, \quad b_3 = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{R_2}. \end{gathered} \tag{146}$$

E. Beltrami 1866, Opere I, S. 297, 298.

10. **Deutungen des Krümmungsmaßes.** Es sei $\mathfrak{p}$ eine Stelle elliptischer Krümmung auf einer Fläche $\mathfrak{F}$ und V der Rauminhalt eines kleinen Eikörpers (konvexen Körpers), der einerseits von $\mathfrak{F}$ und andrerseits von einer Parallelebene im Abstand h zur Tangentenebene von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{p}$ begrenzt wird. Dann gilt für das Krümmungsmaß von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{p}$

$$K = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\pi h^2}{V}\right)^2 \tag{147}$$

W. Blaschke, Jahresbericht der Dtsch. Math. Ver. **27**, 1919, S. 149. Bedeutet O den krummen Teil der Oberfläche unsres Eikörpers, so ist

$$K = \lim_{h \to 0} \left(\frac{2\pi h}{O}\right)^2. \tag{148}$$

11. **Nabelpunkte.** Es sind die Nabelpunkte auf der Fläche $x_1 x_2 x_3 = 1$ zu ermitteln.

12. **Asymptotenlinien.** Es sind die Asymptotenlinien auf einer Ringfläche zu bestimmen, die durch Umdrehung eines Kreises um eine Tangente entsteht.

13. ***H. Minkowski*s Stützfunktion.** Es sei $\mathfrak{F}$ eine Fläche, die keine Torse ist. Die Entfernung p der Tangentenebene vom Ur-

sprung sei als Funktion der Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 des Einheitsvektors der Flächennormalen dargestellt.

Wegen $\xi^2 = 1$ kann man die „Stützfunktion“ P von $\mathfrak{F}$ so normieren, daß

$$P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = p(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \tag{149}$$

und

$$P(\mu\alpha_1, \mu\alpha_2, \mu\alpha_3) = \mu P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \tag{150}$$

wird für $\mu > 0$. Wird dann zur Abkürzung für die Ableitungen

$$\frac{\partial^2 P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k} = P_{ik} \tag{151}$$

geschrieben, so gilt für beliebige a_k die Gleichung

$$R_1 R_2 = -\frac{\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & a_1 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & a_2 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix}}{(a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3)^2}. \tag{152}$$

Vgl. *L. Painvin*, Journal de Mathématiques (2) **17** (1872), S. 219—248 und im folgenden § 78.

14. **Ein Satz von *A. Voss* über Kanalflächen.** Schlägt man um die Punkte $\mathfrak{x}$ einer Kurve $\mathfrak{y}(u)$ Kugeln vom Halbmesser $r(u)$, so umhüllen diese eine sogenannte Kanalfläche, die man folgendermaßen durch Parameter u, v darstellen kann:

$$\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{y} - r r' \xi_1 + r\sqrt{1 - r'^2}\cdot(\xi_2 \cos v + \xi_3 \sin v). \tag{159}$$

Dabei bedeuten die $\xi_k(u)$ die Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeins der Kurve $\mathfrak{y}(u)$. Betrachtet man nun zwei solche Kanalflächen, wobei die zugehörigen Leitlinien $\mathfrak{y}(u)$, $\mathfrak{y}_1(u)$ $(\mathfrak{y}'^2 = 1,\ \mathfrak{y}_1'^2 = 1)$ in entsprechenden Punkten gleiche Krümmung, aber verschiedene Windung haben $(\varrho(u) = \varrho_1(u),\ \tau(u) \neq \tau_1(u))$, so haben diese Kanalflächen in Punkten, die gleichen u, v-Werten entsprechen, gleiche Hauptkrümmungen. *A. Voss*, Zur Theorie der Kanalflächen, Münchener Berichte 1919, S. 353—368.

15. **Ein Satz von *E. Study* über Normalensysteme.** Man kann die Geraden des Raumes derart auf die Punktepaare $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ einer Ebene abbilden, daß einem Normalensystem im allgemeinen eine flächentreue Abbildung $\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}$ in der Ebene entspricht und umgekehrt. *W. Blaschke*, Ein Beitrag zur Liniengeometrie, Rendiconti di Palermo **33** (1912), S. 247—253.

16. ***S. Lies* Abbildung der Geraden auf die Kugeln.** Durch zwei Ebenengleichungen

$$x_1 = ax_3 + p, \quad x_2 = bx_3 + q \tag{154}$$

ist deren Schnittlinie festgelegt. Man kann a, b, p, q als Koordinaten dieser Geraden ansehen. Es sei ferner

$$(x_1 - x)^2 + (x_2 - y)^2 + (x_3 - z)^2 = r^2 \tag{155}$$

die Gleichung einer Kugel. Durch die imaginäre Zuordnung

$$\begin{aligned} a &= x + iy, & b &= z + r, \\ p &= x - iy, & q &= z - r, \end{aligned} \qquad \{i^2 = -1\} \tag{156}$$

werden die Geraden derart auf die Kugeln abgebildet, daß schneidenden Geraden im allgemeinen berührende Kugeln entsprechen. Allen Tangenten einer Fläche entsprechen in der Regel alle eine andere Fläche berührenden Kugeln. Den Asymptotenlinien der ersten Fläche sind dadurch die Krümmungslinien der zweiten zugeordnet. *S. Lie*, Über Komplexe . . ., Math. Annalen **5**, 1872, S. 145—256.

17. **Flächentreue Abbildung.** Die Punkte x_1, x_2 einer Ebene lassen sich auf die Punkte derselben Ebene dadurch unter Gleichheit entsprechender Flächeninhalte abbilden, daß man setzt

$$\begin{aligned} x_1 &= u + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}, \quad & x_1^* &= u - \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}, \\ x_2 &= v - \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}, \quad & x_2^* &= v + \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}, \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v}\right)^2 + 1 \neq 0. \end{aligned} \tag{157}$$

G. Scheffers, Mathem. Zeitschrift **2** (1918), S. 181. Ein Sonderfall bei *Gauß*, Werke III, S. 373. Vgl. auch *D.-A. Gravé*, Journal de mathématiques (5) **2** (1896), S. 317—361.

18. **Äquilonge Abbildungen.** Betrachtet man eine Zuordnung $\mathfrak{E} \to \mathfrak{E}^*$ der Ebenen des Raumes, so sind entsprechende Ebenen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}^*$ im allgemeinen kollinear aufeinander abgebildet, wenn man die Schnittlinien mit unendlich benachbarten, einander zugeordneten Ebenen sich entsprechen läßt. Nach einer von *E. Study* eingeführten Bezeichnung nennt man die Zuordnung $\mathfrak{E} \to \mathfrak{E}^*$ „äquilong", wenn entsprechende Ebenen stets *kongruent* aufeinander bezogen sind. Schreibt man die Gleichung einer Ebene in der Form

$$\frac{u+v}{1+uv} x_1 - i \frac{u-v}{1+uv} x_2 + \frac{1-uv}{1+uv} x_3 = \frac{w}{1+uv}, \tag{158}$$

dann kann man in den Ebenenkoordinaten u, v, w, die zuerst von *O. Bonnet* benutzt wurden, die äquilongen Abbildungen so darstellen

$$u^* = u^*(u), \quad v^* = v^*(v), \quad w^* = \sqrt{\pm \frac{du^*}{du} \cdot \frac{dv^*}{dv}} \cdot w + f(u,v). \tag{159}$$

Dazu kommen noch die Abbildungen, die man durch Vertauschung von u, v erhält. *W. Blaschke*, Archiv für Mathematik u. Physik (3) **16** (1910), S. 182—189. Die entsprechenden Geradentransformationen in der Ebene bei *G. Scheffers*, Math. Annalen **60** (1905), S. 491—531 und *E. Study*, Bonn, Gesellschaft f. Natur- u. Heilkunde, Ber. 5. Dez. 1904.

19. **Über Schiebflächen.** Dafür, daß auf einer Schiebfläche sich die erzeugenden Kurven überall senkrecht durchschneiden, ist notwendig, daß die Fläche ein Zylinder ist.

20. **Eine Formel von *E. Laguerre*.** Für alle Kurven auf einer Fläche, die sich in einem Punkte berühren, stimmen dort die Ausdrücke

$$\left(3\frac{d\Theta}{ds}+\frac{2}{\tau}\right)\frac{\sin\Theta}{\varrho}-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\cdot\cos\Theta \tag{160}$$

überein. Dabei bedeutet Θ den Winkel zwischen Haupt- und Flächennormale. *E. Laguerre* (1870), Werke II, S. 129—130; *E. Goursat*, Cours d'Analyse I, 3. Aufl., Paris 1917, S. 641—642.

4. Kapitel.

Geometrie auf einer Fläche.

§ 52. Verbiegung.

In diesem Kapitel soll der Grundgedanke von *Gauß*ens flächentheoretischen Untersuchungen auseinandergesetzt werden. Denkt man sich eine Fläche aus einem biegsamen, undehnbaren Stoff hergestellt, wie er etwa durch Papier verwirklicht wird, so läßt diese Fläche außer ihrer Beweglichkeit als starrer Körper im allgemeinen auch noch Formänderungen, sogenannte „*Verbiegungen*" zu. Die Undehnbarkeit äußert sich dadurch, daß die Bogenlängen aller auf der Fläche gezogenen Kurven bei der Verbiegung ungeändert bleiben. Etwas allgemeiner bezeichnet man als „*längentreue*" oder „*isometrische Abbildung*" zweier Flächen aufeinander eine Transformation mit Erhaltung der Längen.

Während nun die gewöhnliche Flächentheorie die Eigenschaften der Flächen untersucht, die erhalten bleiben, wenn man die Fläche als starren Körper bewegt, untersucht die *Gauß*ische „Geometrie auf einer Fläche" die gegenüber längentreuen Abbildungen invarianten Eigenschaften, also die „inneren" Eigenschaften der Fläche, die nur von den Maßverhältnissen auf der Fläche selbst und nicht von denen des umgebenden Raumes abhängen. Diese Betrachtungsweise ist auf praktischem Boden erwachsen, nämlich aus der Frage der Geodäsie, was man aus Messungen auf der krummen Erdoberfläche über diese Fläche aussagen kann.

Als Beispiel der längentreuen Abbildung soll gezeigt werden, daß man ein genügend kleines Stück einer Torse längentreu auf die Ebene abbilden kann. Nehmen wir an, um einen bestimmten Fall herauszugreifen, die Torse sei die Tangentenfläche einer Raumkurve

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u) + v\,\mathfrak{y}'(u), \quad \mathfrak{y}'^2 = 1. \tag{1}$$

Setzen wir $\mathfrak{y}' = \xi_1$ und wenden wir die Formeln § 6 (71) von *Frenet* an, so folgt

$$\mathfrak{x}_u = \xi_1 + \frac{v}{\varrho}\xi_2, \quad \mathfrak{x}_v = \xi_1 \tag{2}$$

und für das Linienelement der Tangentenfläche

$$(3) \qquad I = ds^2 = \left(1 + \frac{v^2}{\varrho^2}\right) du^2 + 2\, du\, dv + dv^2.$$

Ordnen wir unsrer Raumkurve $(\mathfrak{y})$ eine ebene Kurve $(\mathfrak{y}^*)$ so zu, daß bei längentreuer Abbildung der beiden Kurven $\varrho(s) = \varrho^*(s)$ wird und beziehen wir die Tangentenfläche (1) von $(\mathfrak{y})$ auf die Tangentenfläche (die Ebene) von $(\mathfrak{y}^*)$

$$(4) \qquad \mathfrak{x}^* = \mathfrak{y}^*(u) + v\,\mathfrak{y}^{*\prime}(u)$$

durch gleiche u, v-Werte, so ergibt sich derselbe Wert des Bogenelements ($I = I^*$). Damit ist der gewünschte Nachweis erbracht. Ähnlich läßt sich die „Abwickelbarkeit" der Kegel und Zylinder auf die Ebene beweisen. Wir kommen auf diese „Abwickelbarkeit" der Torsen später (§ 60) zurück.

Sind zwei längentreu zugeordnete Flächen so auf Parameter u, v bezogen, daß entsprechenden Punkten dieselben Parameterwerte zugehören, so stimmen die zugehörigen ersten Grundformen, also E, F, G für beide Flächen überein. Diese Übereinstimmung sichert die Längentreue. In der Formel (42) von § 36 ist nun das Hauptergebnis von *Gauß* enthalten, daß man das Krümmungsmaß K nur aus E, F und G berechnen kann. Das läßt sich jetzt so aussprechen: *Bei zwei längentreu aufeinander abgebildeten Flächen stimmen in entsprechenden Punkten die Krümmungsmaße überein.* Diesen Satz hat *Gauß* 1822 abgeleitet (vgl. § 73).

Es wird sich im folgenden zunächst darum handeln, etwas deutlicher den geometrischen Grund dieser Biegungsinvarianz von K aufzuhellen.

Da wir früher (§ 46) gezeigt haben, daß die Torsen durch identisches Verschwinden von K gekennzeichnet sind, so folgt aus dem *Gauß*schen Satz: *Die Torsen sind die einzigen auf die Ebene längentreu abbildbaren Flächen.* Diese Tatsache war schon *Euler* (1770) und *Monge* bekannt. Man nennt die Torsen wegen der „Abwickelbarkeit" auf die Ebene auch *„abwickelbare Flächen"*. Ließe man auch imaginäre Flächen zu, oder faßte man im reellen Gebiet den Flächenbegriff sehr allgemein[1]), so wäre dieser Satz mit Einschränkungen zu versehen.

§ 53. Geodätische Krümmung.

Wenn man die „Krümmung" einer auf einer Fläche gezogenen Kurve so erklären will, daß sie bei Verbiegungen der Fläche unverändert bleibt, so braucht man nur die Überlegung von § 22 auf die

[1]) *H. Lebesgue*, Paris C. R. **128**, 1899, S. 1502—1505. Die Tangentenflächen der isotropen Kurven (§ 19) sind nicht „abwickelbar".

durch das Bogenelement einer Fläche gegebene Maßbestimmung zu übertragen.

Nehmen wir unsern Ausgang von orthogonalen Koordinaten ($F = 0$) auf einer Fläche, und setzen wir das Bogenelement in der Gestalt an

$$ds^2 = A^2\,du^2 + B^2\,dv^2; \quad A > 0,\ B > 0. \tag{5}$$

Wir wollen die erste Variation der Bogenlänge der Kurve $v = 0$ ausrechnen. Dazu setzen wir

$$v = \varepsilon\,\bar{v}(u). \tag{6}$$

Die Bogenlänge der Nachbarkurve ist

$$\bar{s} = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{A^2 + B^2 v'^2}\,du, \tag{7}$$

wo bei A und B die Veränderlichen u, $\varepsilon\bar{v}$ zu nehmen sind. Entwickelt man nach Potenzen von ε, so erhält man

$$\bar{s} = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{(A + vA_v + \ldots)^2 + \ldots}\,du,$$

$$\bar{s} = \int_{u_0}^{u_1} (A + vA_v + \ldots)\,du = s + \int_{u_0}^{u_1} vA_v\,du + \ldots$$

Darin bedeuten die Punkte solche Glieder, die in ε mindestens von zweiter Ordnung sind. Daraus ergibt sich für die erste Variation von s der Ausdruck

$$\delta s = \int_{u_0}^{u_1} vA_v\,du. \tag{8}$$

Führen wir an Stelle von du das Bogenelement $A\,du = ds$ auf $v = 0$ ein und an Stelle von

$$v\,B = \varepsilon\,\bar{v}\,B = \delta n,$$

so wird

$$\delta s = \int_{u_0}^{u_1} \frac{A_v}{AB}\,\delta n \cdot ds. \tag{9}$$

Nach § 22 (14) liegt es nahe, den Ausdruck

$$-\frac{A_v}{AB} = \frac{1}{\varrho_g} \tag{10}$$

als neue Art von „Krümmung“ versuchsweise einzuführen. Man nennt diese schon von *Gauß* betrachtete Krümmung einer Flächenkurve, deren Invarianz gegenüber Biegungen von *F. Minding* (1806—1830) erkannt worden ist, nach einem Vorschlag von *J. Liouville* (1809 bis 1882) *„geodätische Krümmung“*[2]).

---

[2]) *F. Minding*, „Bemerkung über die Abwicklung ...“, Crelles Journal 6 (1830), S. 159; *J. Liouville* in *Monges* „Application ...“ (1850), S. 568 unten.

Um diese Erklärung zu rechtfertigen, bleibt noch zu zeigen, daß die gefundene Krümmung unabhängig ist von der noch in weitem Ausmaß willkürlichen Wahl der Parameter u, v. Davon werden wir uns im nächsten Abschnitt durch eine Betrachtung überzeugen, bei der wir aus der Fläche heraustreten, also die innere Geometrie der Fläche wieder verlassen. Indessen wäre es auch ganz einfach, einen „inneren" Beweis für die Unabhängigkeit des $1:\varrho_g$ von der Parameterwahl zu geben. Die Biegungsinvarianz ist bei unsrer Herleitung selbstverständlich.

§ 54. Räumliche Deutung der geodätischen Krümmung.

Auf unsrer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ sei eine Kurve

$$\mathfrak{x}(s) = \mathfrak{x}(u(s),\ v(s))$$

gezogen. Wir zeigen, daß die Determinante

11) $$\boxed{(\mathfrak{x}_s\, \mathfrak{x}_{ss}\, \xi) = \frac{1}{\varrho_g}}$$

mit der geodätischen Krümmung zusammenfällt. Zunächst ist der Ausdruck sicher unabhängig von der Achsenwahl, hat also eine geometrische Bedeutung. Nehmen wir ferner die Parameter auf der Fläche so, daß die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ mit $v = 0$ zusammenfällt, so ist

(12) $$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_s &= \frac{1}{A}\,\mathfrak{x}_u, \\ \mathfrak{x}_{ss} &= \frac{1}{A^2}\,\mathfrak{x}_{uu} - \frac{A_u}{A^3}\,\mathfrak{x}_u, \end{aligned}\right\} \quad \mathfrak{x}_s \times \mathfrak{x}_{ss} = \frac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_{uu}}{A^3}$$

(13) $$\xi = \frac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{A\,B},$$

wenn

(14) $$(\mathfrak{x}_u\, \mathfrak{x}_v\, \xi) = W > 0$$

gewählt wird. Somit ist

$$(\mathfrak{x}_s\, \mathfrak{x}_{ss}\, \xi) = \frac{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_{uu})\,(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)}{A^4 B} = \frac{\mathfrak{x}_{uu}\, \mathfrak{x}_v}{A^2 B}.$$

Aus den hierbei schon benutzten Gleichungen $A^2 = \mathfrak{x}_u^{\,2}$, $F = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = 0$ folgt

$$\mathfrak{x}_{uu}\, \mathfrak{x}_v = -\,\mathfrak{x}_u\, \mathfrak{x}_{uv} = -\,A\,A_v,$$

und deshalb ist wirklich

(15) $$(\mathfrak{x}_s\, \mathfrak{x}_{ss}\, \xi) = -\,\frac{A_v}{A\,B} = \frac{1}{\varrho_g}.$$

Da der Ausdruck links nicht mehr von der Willkür in der Wahl der Parameter u, v abhängt, so ist damit die in § 53 gegebene Erklärung der geodätischen Krümmung gerechtfertigt. Wegen (13)

kehrt sich das Vorzeichen von ξ und daher von ϱ_g um, wenn $\mathfrak{x}_u$ mit $\mathfrak{x}_v$ sein Vorzeichen wechselt, wenn man also zu gegensinnigen Parametern übergeht. Ebenso wechselt $1:\varrho_g$ sein Zeichen, wenn man den positiven Sinn der Zählung der Bogenlänge s umdreht, wie wir das im besonderen Fall der ebenen Kurven in § 9 festgestellt haben. Was dort über das Vorzeichen gesagt wurde, läßt sich sofort auf den hier vorliegenden, allgemeineren Fall übertragen. Die geodätische Krümmung ist also zunächst nur abgesehen vom Vorzeichen erklärt. Das Zeichen kann aber dadurch festgelegt werden, daß man 1. den positiven Sinn wachsender s auf der Kurve auswählt und 2. über den Sinn des Koordinatensystems der u, v oder, was bei $W > 0$ auf dasselbe hinausläuft, über die Wahl des Normalenvektors ξ entscheidet.

Aus (11) kann man jetzt leicht entnehmen, wie die geodätische mit der gewöhnlichen Krümmung zusammenhängt. Nach *Frenet* ist

$$\mathfrak{x}_s = \xi_1, \quad \mathfrak{x}_{ss} = \frac{d\xi_1}{ds} = \frac{\xi_2}{\varrho},$$

also

$$(\mathfrak{x}_s\, \mathfrak{x}_{ss}\, \xi) = \frac{\xi_3 \xi}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_g}. \tag{16}$$

Wir wollen aus unsern Formeln einige Schlüsse ziehen. Zunächst folgt aus (11):

Berühren sich zwei Flächen längs einer Kurve, so hat diese auf beiden Flächen dieselbe geodätische Krümmung.

Wenden wir ferner dieses Ergebnis auf die einer Fläche längs einer Kurve umschriebene Torse an, und beachten wir, daß aus § 53 die Biegungsinvarianz von $1:\varrho_g$ folgt und aus (11), daß bei einer ebenen Kurve die geodätische mit der gewöhnlichen Krümmung zusammenfällt, so erhalten wir weiter:

Die geodätische Krümmung einer Flächenkurve ist gleich der „Abwickelkrümmung"; d. h. der gewöhnlichen Krümmung der ebenen Kurve, die man durch Abwicklung der unsrer Fläche längs der Kurve umschriebenen Torse erhält.

Wendet man den Satz von *Meusnier* (§ 34) auf den Zylinder durch unsre Flächenkurve $\mathfrak{x}(s)$ senkrecht zur Tangentenebene der Fläche in einem Punkt dieser Kurve an, so folgt aus (16):

Die geodätische Krümmung einer Flächenkurve ist gleich der gewöhnlichen Krümmung ihres Normalrisses auf die Tangentenebene.

Es sei noch eine zweite, sehr einfache Herleitung der Formel (11) für die geodätische Krümmung angegeben. In § 22 hatten wir für die erste Variation der Bogenlänge die Formel (13) hergeleitet, nämlich

$$\delta s = -\int \frac{v}{\varrho}\, ds. \tag{17}$$

Dabei war vorausgesetzt, daß die Verrückung senkrecht zur Kurventangente erfolge und v die Verrückungskomponente in Richtung der Hauptnormalen ξ_2 bedeute. Jetzt haben wir die Formel

$$\delta s = -\int \frac{\delta n}{\varrho_g} ds. \tag{18}$$

Nun ist nach der Erklärung von v

$$v = (\xi \xi_2)\,\delta n = \varrho\,(\xi\, x_s\, x_{ss})\,\delta n.$$

Da durch diese Substitution die Formel (17) für δs in die Formel (18) übergehen muß, finden wir tatsächlich

$$\frac{1}{\varrho_g} = (\xi\, x_s\, x_{ss}).$$

§ 55. Beweis von *Radon* für einen Satz von *Schwarz*.

J. Radon hat bemerkt, daß man die Sätze von *Schwarz* aus §§ 28, 29 durch den Begriff der geodätischen Krümmung sehr einfach bestätigen kann. Beweisen wir z. B. folgendes:

Eine geschlossene Kurve des Raumes, deren Krümmung $\leqq$ Eins ist, und die höchstens eine Ecke besitzt, hat mindestens den Umfang des Einheitskreises.

Man lege durch die Ecke $\mathfrak{p}$ der Kurve oder, wenn die Kurve glatt verläuft, durch irgendeinen ihrer Punkte als Spitze den durch die Kurve $\mathfrak{C}$ hindurchgehenden Kegel. Durch Abwicklung dieses Kegels in die Ebene geht $\mathfrak{C}$ in eine ebene Kurve $\mathfrak{C}^*$ über. Nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts ist

$$\left|\frac{1}{\varrho^*}\right| = \left|\frac{1}{\varrho_g}\right| = \left|\frac{\xi\,\xi_2}{\varrho}\right| \leqq 1. \tag{19}$$

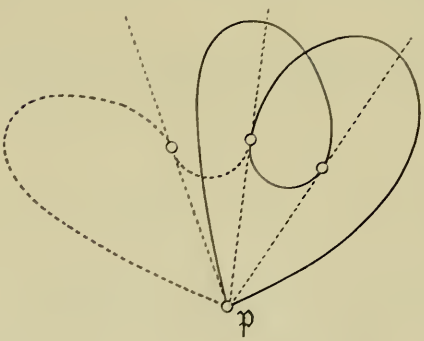


Fig. 16.

Damit ist die Aufgabe auf ein Problem der ebenen Geometrie zurückgeführt.

Durch ein Spiegelungsverfahren kann man stets erreichen, daß der von $\mathfrak{p}$ nach den Punkten von $\mathfrak{C}^*$ hinweisende Fahrstrahl sich beim Durchlaufen von $\mathfrak{C}^*$ stets im gleichen „positiven“ Sinn um $\mathfrak{p}$ dreht, indem man nämlich Teile von $\mathfrak{C}^*$ nötigenfalls an den durch $\mathfrak{p}$ gehenden Tangenten spiegelt (Fig. 16).

In der Ebene ist nun, wenn wir $\mathfrak{p}$ zum Ursprung eines rechtwinkligen Achsenkreuzes x_1, x_2 wählen, nach § 9 (85)

$$x_1'' = -\frac{x_2'}{\varrho^*}, \quad x_2'' = +\frac{x_1'}{\varrho^*},$$

also wegen der Stetigkeit von x_k und x_k' und der Geschlossenheit von $\mathfrak{C}^*$ durch Integration nach Teilen

$$-\int x_1 x_1''\, ds = +\int \frac{x_1 x_2'}{\varrho^*}\, ds = \int x_1'^2\, ds,$$

$$-\int x_2 x_2''\, ds = -\int \frac{x_2 x_1'}{\varrho^*}\, ds = \int x_2'^2\, ds.$$

Daraus durch Addition für den Umfang

$$L = \int (x_1'^2 + x_2'^2)\, ds = \int \frac{x_1 x_2' - x_2 x_1'}{\varrho^*}\, ds. \tag{20}$$

Da $\mathfrak{p}$ vom Fahrstrahl stets im positiven Sinn umlaufen wird, ist

$$(x_1 x_2' - x_2 x_1')\, ds = 2\, df > 0. \tag{21}$$

Somit folgt aus (20) wegen (21) und (19)

$$L \leqq 2F, \tag{22}$$

wenn F den von $\mathfrak{C}^*$ umfahrenen Flächeninhalt

$$2F = \int (x_1 x_2' - x_2 x_1')\, ds$$

bedeutet.

Wegen der klassischen Isoperimetrie (§ 27) des Kreises ist aber

$$F \leqq \frac{L^2}{4\pi} \tag{23}$$

und somit ist

$$L \leqq 2F \leqq \frac{L^2}{2\pi},$$

oder

$$L \geqq 2\pi, \tag{24}$$

wie gezeigt werden sollte. Dabei kann das Gleichheitszeichen nur gelten, wenn in (23) das Gleichheitszeichen gilt, wenn also nach § 27 die Kurve $\mathfrak{C}^*$ ein Kreis ist. Soll dann auch noch in (19) die Gleichheit gelten, so muß $\xi\xi_3 = 1$ sein, also $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{C}^*$ zusammenfallen. Somit ist nur dann $L = 2\pi$, wenn $\mathfrak{C}$ ein Einheitskreis ist.

Die isoperimetrische Ungleichheit (23) wird hier unter den allgemeinen Voraussetzungen verwandt, wie sie in dem Beweis von *A. Hurwitz* abgeleitet wurde (§ 27).

Auch die übrigen Sätze von § 28, 29 sind dem hier vorgetragenen Verfahren *Radons* zugänglich.

§ 56. Geodätische Linien.

Nach der Formel (vgl. § 53 (9), (10))

$$\delta s = -\int \frac{\delta n}{\varrho_g}\, ds \tag{25}$$

verschwindet die erste Variation δs der Bogenlänge für beliebige Ver-

rückungen δn für die Flächenkurven mit identisch verschwindender geodätischer Krümmung. Man nennt seit der Mitte des 19. Jahrhunderts diese Linien auf der Fläche, die an Stelle der geraden Linien in der Ebene treten, und die schon *Euler* betrachtet hat, *geodätische Linien*. Unter ihnen sind jedenfalls die kürzesten Verbindungen auf einer Fläche zwischen zwei vorgegebenen Flächenpunkten zu suchen.

Nach (11) genügen die geodätischen Linien der Bedingung

$$(\mathfrak{x}_s \mathfrak{x}_{ss} \xi) = 0. \tag{26}$$

D. h. geometrisch, *ihre Schmiegebenen gehen durch die zugehörigen Flächennormalen*. Auch die geraden Linien ($\mathfrak{x}_s \times \mathfrak{x}_{ss} = 0$) auf einer Fläche genügen der Bedingung (26).

Ferner ergibt sich aus (26), daß die geodätischen Linien einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen, so daß wir erwarten können, daß durch jedes Linienelement[3]) der Fläche eine einzige geodätische Linie hindurchgeht, was sich aus der Regularität der Fläche auf Grund von Existenzsätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung streng begründen läßt.

Nehmen wir eine einparametrige Schar geodätischer Linien, die ein Flächenstück „schlicht" überdeckt, so daß also durch jeden Punkt des Flächenstücks nur eine einzige Kurve der Schar hindurchgeht. Diese Schar — nach *Weierstraß* spricht man auch von einem „Feld" geodätischer Linien — nehmen wir als Kurven $v = \text{konst.}$, während die Kurven $u = \text{konst.}$ die orthogonalen Trajektorien sein sollen. Für das Bogenelement

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

finden wir dann nach (15) und (26) die Bedingung

$$\frac{1}{\varrho_g} = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{E}\sqrt{G}} = 0, \tag{27}$$

d. h. E ist nur von u abhängig, nicht von v. Führen wir nun an Stelle von

$$\int \sqrt{E}\,du$$

einen neuen Parameter ein, er sei nachträglich wieder mit u bezeichnet, so nimmt das Bogenelement die einfache von *Gauß* angegebene Gestalt an

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2. \tag{28}$$

Für $v = \text{konst.}$ wird

$$s = \int_{u_0}^{u_1} du = u_1 - u_0.$$

[3]) Das Wort „Linienelement" oder „Bogenelement" wird in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht. Während sonst immer die erste Grundform der Flächentheorie darunter zu verstehen ist, ist hier ein Punkt mit hindurchgehender Richtung gemeint.

Das gibt sofort den Satz: *Die orthogonalen Trajektorien eines geodätischen Feldes schneiden auf den geodätischen Linien des Feldes gleiche Längen ab.*

Umgekehrt: Schneiden die Kurven $u = \text{konst.}$ auf ihren orthogonalen Trajektorien $v = \text{konst.}$ gleiche Längen aus, so sind die Linien $v = \text{konst.}$ geodätisch.

Die Kurven $u = \text{konst.}$ nennt man *geodätisch parallel.* Für die Bogenlänge einer Kurve des Feldes $v = v(u)$, $v(u_0) = v(u_1) = v_0$ erhält man

$$s = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\, du \tag{29}$$

Wegen $G > 0$ folgt danach

$$s \geqq u_1 - u_0 \tag{30}$$

Daraus ergibt sich, daß die geodätischen Linien *kürzeste* sind.

Läßt sich ein Bogen einer geodätischen Linie in ein „Feld" einbetten[4]*, so liefert die geodätische Linie die kürzeste Verbindung zwischen zweien ihrer Punkte im Vergleich zu allen anderen innerhalb des Feldes verlaufenden Kurven.*

Die Bedingung des Einbettens ist dabei nicht überflüssig. Davon kann man sich am besten auf der Kugelfläche überzeugen. Die Großkreise der Kugel sind dort die geodätischen Linien. Jeder Großkreisbogen, der kleiner als ein Halbkreis ist, läßt sich in ein Feld von Großkreisbogen einbetten, hingegen ein Großkreisbogen, der diametral gegenüberliegende Punkte enthält, nicht. Tatsächlich liefert aber auch ein Großkreisbogen, der über einen Halbkreis hinausragt, für die Bogenlänge kein Extrem.

§ 57. Geodätische Polarkoordinaten.

Es sei $\mathfrak{o}$ ein Punkt einer Fläche, φ der Winkel einer durch $\mathfrak{o}$ gehenden geodätischen Linie mit einer festen Richtung durch $\mathfrak{o}$, und r die auf dieser geodätischen Linie gemessene Entfernung eines ihrer Punkte von $\mathfrak{o}$. Diese Größen r, φ kann man als das Gegenstück der Polarkoordinaten der Ebene als *geodätische Polarkoordinaten* bezeichnen. Das Linienelement hat für diese Parameter r, φ zunächst die *Gauß*sche Form (28)

$$ds^2 = dr^2 + G\,d\varphi^2.\ ^5) \tag{31}$$

Hierin ist enthalten, daß die „geodätischen Kreise" $r = \text{konst.}$ ihre

[4]) Diese Bedingung des Einbettens ist nahe verwandt mit der sogenannten Bedingung *Jacobi*s, auf die wir später (§ 83) zu sprechen kommen werden.

[5]) Auf die Frage, in welchem Umkreis um $\mathfrak{o}$ diese geodätischen Polarkoordinaten brauchbar sind, kommen wir später zu sprechen (§ 85).

geodätischen Radien $\varphi = \text{konst.}$ senkrecht durchschneiden. Es bleibt festzustellen, wie sich die Funktion $G(r, \varphi)$ an der für die Parameterdarstellung ausgezeichneten Stelle $r = 0$ verhält. Offenbar sind

$$r\cos\varphi = u, \qquad r\sin\varphi = v \tag{32}$$

in $\mathfrak{o}$ reguläre Parameter, die man als *Normalkoordinaten* oder als *Riemanns kanonische Koordinaten* in $\mathfrak{o}$ zu bezeichnen pflegt. Sie treten an die Stelle der rechtwinkligen Koordinaten in der Ebene. Es ist

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{v}{u},$$

$$dr = \frac{u\,du + v\,dv}{r}, \qquad d\varphi = \frac{u\,dv - v\,du}{r^2};$$

$$ds^2 = \frac{u^2\,du^2 + 2\,uv\,du\,dv + v^2\,dv^2}{r^2} + G\frac{u^2\,dv^2 - 2\,uv\,du\,dv + v^2\,du^2}{r^4}. \tag{33}$$

Soll dieses Linienelement die Form

$$ds^2 = E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2$$

haben, wo E_1, F_1, G_1 reguläre Potenzreihen an der Stelle $u, v = 0$ sind, so muß $G(r, \varphi)$ die Form haben

$$G(r, \varphi) = r^2\{1 + r^2\mathfrak{P}(u, v)\}, \tag{34}$$

wo $\mathfrak{P}$ eine konvergente Potenzreihe von u, v ist. Ziehen wir aus dieser noch das konstante Glied heraus, so haben wir

$$G(r, \varphi) = r^2\{1 + r^2[\alpha + \mathfrak{Q}(u, v)]\}$$

oder

$$G(r, \varphi) = r^2 + \alpha r^4 + r^5\cdot(\beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi) + \ldots, \tag{35}$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder in r von mindestens sechster Ordnung sind.

Die Form (31) des Bogenelements bezogen auf *Riemanns* Normalkoordinaten bekommt jetzt die Reihenentwicklung

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + \alpha(u\,dv - v\,du)^2 + \ldots \tag{36}$$

Dreht man unser Polarkoordinatensystem um $\mathfrak{o}$, so bleibt r ungeändert, φ wächst um eine Konstante, und α bleibt fest. Daraus ergibt sich, daß α nur vom Punkt $\mathfrak{o}$ abhängt, also eine *Biegungsinvariante* der Fläche für den Punkt $\mathfrak{o}$ ist. Es bleibt festzustellen, wie α mit den Bewegungsinvarianten von § 35 zusammenhängt.

§ 58. Noch einmal *Gaußens* Theorema egregium.

Im vorigen Abschnitt sind wir ganz naturgemäß zu einer Biegungsinvariante α gelangt, von der wir nur festzustellen brauchen, daß sie mit dem Krümmungsmaß $K = 1 : R_1R_2$ (§ 35) bis auf einen unwesentlichen Zahlenfaktor zusammenfällt.

Um diesen neuen Beweis von der Biegungsinvarianz des Krümmungsmaßes zu erhalten, der keinen Gebrauch von der *Gauß*schen Formel § 36 (42) macht, brauchen wir nur von geodätischen Polarkoordinaten auf rechtwinklige räumliche Koordinaten überzugehen, indem wir etwa setzen

$$(37)\qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi + \frac{r^2}{2}y_1(\varphi) + \frac{r^3}{6}z_1(\varphi) + \dots, \\ x_2 = r\sin\varphi + \frac{r^2}{2}y_2(\varphi) + \frac{r^3}{6}z_2(\varphi) + \dots, \\ x_3 = \quad * \quad \frac{r^2}{2}y_3(\varphi) + \dots . \end{cases}$$

Die Kurven $\varphi =$ konst. sollen geodätisch sein, ihre Hauptnormalen somit identisch mit den Flächennormalen ($\xi_{21} = \xi_{22} = 0$, $\xi_{23} = 1$). Es ist also nach *Frenet* (§ 6) und *Euler* (§ 34)

$$\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial r^2}\right)_0 = y_1 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 x_2}{\partial r^2}\right)_0 = y_2 = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial r^2}\right)_0 = y_3 = \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}.$$

Somit haben wir

$$(38)\qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi + \frac{r^3}{6}z_1 + \dots, \\ x_2 = r\sin\varphi + \frac{r^3}{6}z_2 + \dots, \\ x_3 = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}\right) + \dots = \frac{r^2}{2}y_3 + \dots . \end{cases}$$

Hieraus berechnen wir mit Hilfe von (31) und (35)

$$E = 1 + r^2\{z_1\cos\varphi + z_2\sin\varphi + y_3^2\} + \dots = 1,$$
$$F = r^3\left\{\frac{-z_1\sin\varphi + z_2\cos\varphi}{2} + \frac{z_1'\cos\varphi + z_2'\sin\varphi}{6} + \frac{y_3 y_3'}{2}\right\} + \dots = 0,$$
$$G = r^2 + r^4\left\{\frac{-z_1'\sin\varphi + z_2'\cos\varphi}{3} + \frac{y_3'^2}{4}\right\} + \dots = r^2 + \alpha r^4 + \dots .$$

Somit ist durch Vergleichen gleicher Potenzen

$$z_1\cos\varphi + z_2\sin\varphi = -y_3^2,$$
$$3(-z_1\sin\varphi + z_2\cos\varphi) + (z_1'\cos\varphi + z_2'\sin\varphi) = -3y_3y_3',$$
$$4(-z_1'\sin\varphi + z_2'\cos\varphi) + 3y_3'^2 = 12\alpha.$$

Daraus folgert man leicht

$$(39)\qquad 12\alpha = -4y_3^2 + y_3'^2 - 2y_3y_3''$$

oder, wenn man für y_3 seinen Wert einsetzt,

$$3\alpha = -\frac{1}{R_1R_2}.$$

Es ist also damit wirklich gezeigt, daß

$$\alpha = -\tfrac{1}{3} K_0 \tag{40}$$

ist, daß also α im wesentlichen mit dem Krümmungsmaß der Fläche im Ursprung zusammenfällt. Damit ist der *Gauß*ische Satz neu bewiesen.

Viel einfacher bekommt man natürlich den Zusammenhang zwischen K und α, wenn man die Formel (138) von *Gauß* in § 49 heranzieht. Setzt man darin $E = 1$, $F = 0$, so wird

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \sqrt{G}. \tag{41}$$

Hieraus ergibt sich sofort der gewünschte Zusammenhang (40).

Aus unsren Formeln folgt leicht eine geometrische Deutung des Krümmungsmaßes, die seine Biegungsinvarianz in helles Licht rückt. Es war für geodätische Polarkoordinaten

$$ds^2 = dr^2 + \left(r^2 - \frac{K_0}{3} r^4 + \ldots\right) d\varphi^2. \tag{42}$$

Berechnen wir hieraus die Umfänge L der Kurven $r = \text{konst.}$, die man nach *Gauß* als *„geodätische Kreise“* bezeichnet, so finden wir

$$L = \int_{-\pi}^{+\pi} \sqrt{G}\, d\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(r - \frac{K_0}{6} r^3 + \ldots\right) d\varphi \tag{43}$$

oder

$$L = 2\pi r - \frac{\pi}{3} K_0 r^3 + \ldots. \tag{44}$$

Somit ist, wie *J. Bertrand* und *V. Puiseux* 1848 gefunden haben[6]),

$$K_0 = \lim_{r \to 0} \frac{3}{\pi} \cdot \frac{2\pi r - L}{r^3}. \tag{45}$$

Das ist die gewünschte „innere“ geometrische Deutung von K. Man kann sie auch mit *Diguet* (1848)[6]) noch etwas anders fassen. Der Flächeninhalt F unseres geodätischen Kreises ist nämlich

$$F = \int_0^r L\, dr = \pi r^2 - \frac{\pi}{12} K_0 r^4 + \ldots \tag{46}$$

und daraus folgt

$$K_0 = \lim_{r \to 0} \frac{12}{\pi} \cdot \frac{\pi r^2 - F}{r^4}. \tag{47}$$

[6]) Vgl. *G. Monge*, Application . . ., 5. Aufl. 1850, 4. Note, S. 583—588. *Diguet*, Journal de Mathématiques (1) **13** (1848), S. 83—86.

§ 59. Zwei verschiedene Erklärungen der geodätischen Kreise.

Wir haben im vorigen Abschnitt die geodätischen Kreise einer Fläche durch ihre Mittelpunktseigenschaft erklärt, indem wir nämlich auf allen durch einen Punkt o der Fläche gehenden geodätischen Linien von o aus dieselben Entfernungen abgetragen haben. Wir wollen die so erklärten geodätischen Kreise im folgenden *„Entfernungskreise"* nennen.

Ebenso gut kann man aber die isoperimetrische Eigenschaft der Kreise (§ 25) verwenden, um ihre Definition von der Ebene auf eine krumme Fläche zu übertragen. Die erste Variation des Umfangs L einer auf der Fläche gezogenen geschlossenen Kurve ist (vgl. § 54 (18))

$$\delta L = -\oint \frac{\delta n}{\varrho_g} \cdot ds \tag{48}$$

und die Variation des auf der Fläche umgrenzten Flächeninhalts

$$\delta F = -\oint \delta n \cdot ds. \tag{49}$$

Daraus ergibt sich genau wie in § 25 als Differentialgleichung der Extremalen des isoperimetrischen Problems (L = gegeben, F = Maximum)

$$\frac{1}{\varrho_g} = \text{konst.} \tag{50}$$

Diese Kurven mit fester geodätischer Krümmung, die von *S. Lie* und *G. Darboux* als „geodätische Kreise" bezeichnet wurden, sollen hier (geodätische) *„Krümmungskreise"* genannt werden.

Wir wollen zeigen: *Dafür, daß die beiden Erklärungen der geodätischen Kreise auf einer Fläche zusammenfallen, ist notwendig, daß die Fläche festes Krümmungsmaß* (K = konst.) *besitzt.*

Dazu setzen wir das Bogenelement in geodätischen Polarkoordinaten an (vgl. § 57).

$$ds^2 = dr^2 + r^2\{1 + \alpha r^2 + (\beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi) r^3 + \ldots\} d\varphi^2. \tag{51}$$

Entwickeln wir auch K nach Potenzen von r! Es war nach (41)

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \sqrt{G}.$$

Setzt man für G seinen Wert aus (51) ein, so folgt

$$-K = 3\alpha + 6(\beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi) r + \ldots. \tag{52}$$

Andrerseits findet sich für die geodätische Krümmung der Mittelpunktskreise r = konst. nach Formel (10)

$$\frac{1}{\varrho_g} = -\frac{(\sqrt{G})_r}{\sqrt{G}} = -\frac{1}{r}\{1 + \alpha r^2 + \tfrac{3}{2}(\beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi) r^3 + \ldots\}. \tag{53}$$

Dafür, daß diese Mittelpunktskreise auch gleichzeitig Krümmungskreise sind, ist notwendig $\beta = \gamma = 0$. Dann aber hat K nach (52) an der betreffenden Stelle einen stationären Wert, da $\partial K : \partial r$ für jede Richtung φ verschwindet. Soll das an jeder Stelle unsrer Fläche der Fall sein, so muß tatsächlich K längs der Fläche fest bleiben.

Später (§ 70) soll gezeigt werden, daß sich die notwendige Bedingung $K =$ konst. schon aus der schwächeren Forderung herleiten läßt, daß alle Krümmungskreise *geschlossen* sein sollen, was bei den Entfernungskreisen von selbst der Fall ist.

§ 60. Flächen festen Krümmungsmaßes.

Durch unsre Fragestellung sind wir ganz von selbst auf die wichtige Klasse von Flächen mit festem K geführt worden. Um nun festzustellen, in welchem Umfang die gefundene Bedingung $K =$ konst. für die Übereinstimmung der Krümmungskreise mit den Mittelpunktskreisen auch hinreicht, wollen wir die Maßverhältnisse auf einer solchen Fläche untersuchen, womit schon 1830 *F. Minding* begonnen hat.

Dazu führen wir auf einer solchen Fläche ein *Gauß*isches geodätisches Parametersystem ein

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2$$

und wählen insbesondere auch die Kurve $u = 0$ als geodätische Linie mit v als Bogenlänge. Dann ist

$$G(0, v) = 1, \qquad G_u(0, v) = 0. \tag{54}$$

Ferner hatten wir für das Krümmungsmaß die Formel (41)

$$-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\sqrt{G} = K. \tag{55}$$

Durch die Differentialgleichung (55) und die beiden Randbedingungen (54) ist aber die Funktion G leicht berechenbar. Ist zunächst $K = 0$, so wird

$$\sqrt{G} = A(v)\,u + B(v). \tag{56}$$

Wegen der Randbedingungen ist $B = 1$, $A = 0$. Somit haben wir

$$ds^2 = du^2 + dv^2, \tag{57}$$

die Maßbestimmung in der Ebene *Euklid*s. Dadurch ist aufs neue bestätigt (vgl. § 52), daß die Torsen ($K = 0$) im Kleinen auf die Ebene längentreu abbildbar sind.

Nehmen wir zweitens $K > 0$. Dann hat die allgemeine Lösung von (55) die Form

$$\sqrt{G} = A(v)\cos(\sqrt{K}u) + B(v)\sin(\sqrt{K}u). \tag{58}$$

Unter Berücksichtigung der Randwerte ergibt sich

$$A = 1, \qquad B = 0.$$

Somit bekommen wir das Linienelement

$$ds^2 = du^2 + \cos^2(\sqrt{K}\,u)\cdot dv^2. \tag{59}$$

Es bleibt noch der Fall $K < 0$. Man findet entsprechend

$$ds^2 = du^2 + ch^2(\sqrt{-K}\,u)\cdot dv^2, \tag{60}$$

wo der hyperbolische Kosinus die Bedeutung hat

$$ch\,\psi = \tfrac{1}{2}(e^{+\psi} + e^{-\psi}). \tag{61}$$

In den damit gewonnenen Ergebnissen ist enthalten: *Zwei genügend kleine Stücke zweier Flächen mit demselben festen Gaußischen Krümmungsmaß sind stets aufeinander längentreu abbildbar.*

Daß der entsprechende Satz für Flächen in ihrer Gesamterstreckung nicht mehr gilt, soll später gezeigt werden (§ 77). Da ferner, um zu unsren Normalformen des Linienelements zu kommen, der Punkt $u = 0$, $v = 0$ und durch ihn die Richtung von $v = 0$ noch beliebig wählbar ist, erkennt man: *Jede Fläche festen Krümmungsmaßes gestattet eine Gruppe längentreuer Abbildungen auf sich selbst; und zwar kann man einem Punkt und einer hindurchgehenden Richtung einen beliebigen andern Punkt und eine beliebige Richtung durch ihn zuordnen.*

Da die „Spiegelung" $u^* = -u$, $v^* = v$ ebenfalls isometrisch ist, wird durch die Zuordnung der zwei „Linienelemente" (Punkt + Richtung durch ihn) die Abbildung zweideutig bestimmt.

§ 61. Abbildung der Flächen festen negativen Krümmungsmaßes auf *Poincarés* Halbebene.

Als einfachen Typus für die Flächen $K = 0$ haben wir die Ebenen, für $K > 0$ die Kugeln. Für $K < 0$ könnten wir Kugeln mit rein imaginärem Halbmesser einführen. Doch wird eine reelle Darstellung wünschenswert sein. Dazu könnte man etwa alle Drehflächen mit festem K ermitteln, was sich mittels elliptischer Integrale leicht ausführen läßt[7]). Aber das anschaulichste Bild der Maßbestimmung auf einer Fläche, etwa mit $K = -1$, bekommt man auf folgende Weise.

Es wird für eine solche Fläche mit dem *Gaußischen* Bogenelement (vgl. § 60)

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\sqrt{G} = \sqrt{G}\,.$$

---

[7]) Vgl. etwa *G. Scheffers*, Theorie der Flächen, 2. Aufl., Leipzig 1913, S. 139 ff., bzw. die Fig. S. 141.

Der Typus der betrachteten Fläche bleibt erhalten, wenn wir etwa setzen

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}\,dv^2. \tag{62}$$

Es seien nun x, y rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene. Wir bilden die Fläche auf diese Ebene ab, indem wir setzen

$$x = v, \qquad y = e^{-u}. \tag{63}$$

Das Abbild der Fläche auf die Ebene liegt dann jedenfalls in der oberen Halbebene $y > 0$. Dann wird

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \tag{64}$$

Was sind die ebenen Bilder der geodätischen Linien? Dazu brauchen wir nur die Extremalen des Variationsproblems

$$\delta \int ds = \delta \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}\,dx = 0 \tag{65}$$

zu ermitteln.

Hat man ein Variationsproblem von der Form

$$J = \int f(x, y, y')\,dx = \text{Extrem}, \tag{66}$$

und betrachtet man Variationen von der Gestalt

$$\bar{y} = y(x) + \varepsilon\eta(x), \tag{67}$$

so findet man für

$$\delta J = \varepsilon\,[J'(\varepsilon)]_{\varepsilon=0} = \varepsilon \int (f_y \eta + f_{y'} \eta')\,dx. \tag{68}$$

Ist an den Enden der Integrationsstrecke $\eta = 0$, so folgt durch Integration nach Teilen

$$\delta J = \varepsilon \int \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right) \eta\,dx. \tag{69}$$

Soll also für beliebiges η stets $\delta J = 0$ sein, so muß die Kurve $y = y(x)$ der Differentialgleichung von *Euler* und *Lagrange* genügen

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \tag{70}$$

oder ausführlich

$$f_y - f_{xy'} - f_{yy'} y' - f_{y'y'} y'' = 0. \tag{71}$$

In unsrem Fall (65) hängt f von x nicht ab, Es ist daher

$$\frac{d}{dx}(f - y' f_{y'}) = y' \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right). \tag{72}$$

Die Differentialgleichung von *Euler* und *Lagrange* hat also hier ein „erstes Integral“

$$f - y' f_{y'} = \text{konst.} \tag{73}$$

Setzt man für f seinen Wert ein,

$$f = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}, \tag{74}$$

so erhält man

$$y\sqrt{1+y'^2} = a$$

und daraus durch eine weitere Integration

$$(x-x_0)^2 + y^2 = a^2 \tag{75}$$

als Gleichung der Extremalen.

Die Abbilder der geodätischen Linien sind also Halbkreise, die auf der Achse $y=0$ senkrecht aufsitzen. Dazu sind auch die Halbgeraden $x=$ konst. zu rechnen, die sich der Darstellung $y=y(x)$ entziehen.

Von der Abbildung unsrer Fläche auf die Halbebene kann man leicht einsehen, daß sie *winkeltreu* ist. Der Winkel φ zweier Linienelemente

$$d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u\,du + \mathfrak{x}_v\,dv$$
$$\delta\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u\,\delta u + \mathfrak{x}_v\,\delta v$$

auf einer Fläche ist durch die Formel bestimmt

$$\cos\varphi = \frac{d\mathfrak{x}\cdot\delta\mathfrak{x}}{ds\cdot\delta s} = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2}}. \tag{76}$$

Für die Form (62) des Bogenelementes ergibt sich also wegen (63)

$$\cos\varphi = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2+dy^2}\,\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}}.$$

Das ist genau der gewöhnliche Winkel φ in der x, y-Ebene. Etwas vereinfachen kann man diese Rechnung dadurch, daß man die Invarianz des Ausdrucks rechts in (76) nachweist und dann diesen Ausdruck für das Bogenelement (64) aufstellt.

§ 62. Längentreue Abbildungen einer Fläche mit $K=-1$ auf sich selbst.

Es soll jetzt untersucht werden, was den längentreuen Abbildungen unsrer Fläche auf sich selbst in der Halbebene $y>0$ entspricht. Nach den Ergebnissen von § 61 sehen wir: Die längentreuen Abbildungen der Fläche auf sich selbst sowie die Abbildungen der Halbebene auf sich selbst sind winkeltreu. Wir setzen nach *Gauß*

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1$$

und behaupten: jeder Substitution

$$z^* = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \tag{77}$$

wo α, β, γ, δ vier reelle Zahlen mit positiver Determinante sind $(\alpha\delta-\beta\gamma>0)$, entspricht eine isometrische Abbildung der Fläche.

Dazu braucht man nur zu zeigen, daß das Bogenelement (64) bei der Abbildung (77) erhalten bleibt. Man findet

$$dz^* = (\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{dz}{(\gamma z+\delta)^2} \tag{78}$$

und aus

$$z^* = \frac{\{\alpha(x+iy)+\beta\}\cdot\{\gamma(x-iy)+\delta\}}{|\gamma z+\delta|^2}$$

ergibt sich

$$y^* = (\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{y}{|\gamma z+\delta|^2}.$$

Daraus folgt

$$ds^* = \frac{|dz^*|}{y^*} = \frac{|dz|}{y} = ds, \tag{79}$$

wie behauptet wurde. Nimmt man zu den Transformationen (77) noch die Abbildung

$$x^* = -x, \quad y^* = y \tag{80}$$

hinzu, so bekommt man durch Zusammensetzung alle Abbildungen unsrer Halbebene $y > 0$, die den längentreuen Abbildungen der Fläche in sich entsprechen. Dazu braucht man nur zu zeigen, daß man durch eine Abbildung (77) jedes Linienelement in $(y > 0)$ in jedes andre Element derselben Halbebene überführen kann. Jeden Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ mit $y_0 > 0$ kann man überführen in den Punkt $z^* = i$ durch die Substitution

$$z^* = \frac{1}{y_0}(z - x_0). \tag{81}$$

Außerdem läßt sich unsre Halbebene $y > 0$ um den Punkt $z = i$ durch einen beliebigen Winkel ω „drehen", was durch die Substitution

$$z^* = \frac{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + z}{1 - z\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}} \tag{82}$$

gelingt. Man findet nämlich aus (82) durch Differenzieren für $z = i$

$$dz^* = e^{i\omega}dz.$$

Damit haben wir also die Gesamtheit der längentreuen Abbildungen unsrer Fläche auf sich selbst in den Parametern x, y oder deren komplexer Verbindung $x + iy = z$ analytisch dargestellt.

Man kann jetzt leicht einsehen, was das Integral

$$S = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}, \tag{83}$$

genommen zwischen zwei Punkten z_1, z_2 $(y_k > 0)$ längs des Abbildes der geodätischen Linie, also längs des sie verbindenden auf $y = 0$

senkrechten Halbkreises, für eine Bedeutung hat. Die Schnittpunkte dieses Halbkreises mit $y = 0$ seien mit z_0, z_∞ bezeichnet (Fig. 17). Durch die Substitution

$$z^* = \frac{z - z_0}{z - z_\infty}, \tag{84}$$

die das Integral (83) ungeändert läßt (vgl. (79)), werfen wir unsern Halbkreis auf die Halbachse der positiven y. Jetzt wird

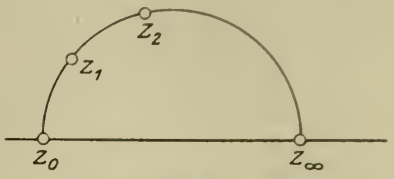


Fig. 17.

$$S = \left| \int_{y_1^*}^{y_2^*} \frac{dy}{y} \right| = \left| ln \frac{y_2^*}{y_1^*} \right|. \tag{85}$$

Das läßt sich auch durch ein Doppelverhältnis ausdrücken

$$S = | ln\, Dv\,(z_1^*\, z_2^*\, z_0^*\, z_\infty^*) | .$$

Da aber das Doppelverhältnis bei linearen Substitutionen ungeändert bleibt, haben wir schließlich

$$S = | ln\, Dv\,(z_1\, z_2\, z_0\, z_\infty) | . \tag{86}$$

Darin ist die gewünschte Deutung von S enthalten.

Was ist das Abbild der „Entfernungskreise“ in unsrer Halbebene? Nach § 56 schneiden die Entfernungskreise ihre geodätischen Radien

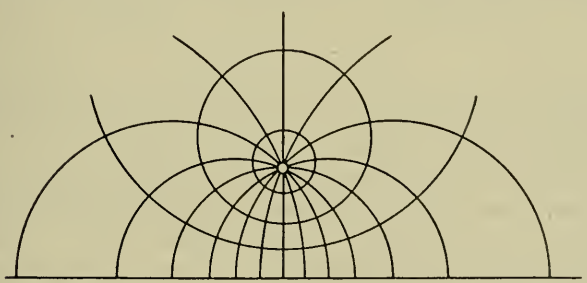


Fig. 18.

senkrecht. Da die Abbildung auf die Halbebene winkeltreu ist, können wir das Abbild der Entfernungskreise um den Punkt z_0 so konstruieren. Wir zeichnen alle Halbkreise durch z_0 senkrecht zu $y = 0$. (Fig. 18.) Die orthogonalen Trajektorien dieses Halbkreisbüschels sind bekanntlich wieder Kreise. Das Abbild der Entfernungskreise sind also gewöhnliche Kreise, die ganz in der Halbebene $y > 0$ verlaufen.

Um festzustellen, daß alle diese Entfernungskreise auch gleichzeitig Krümmungskreise sind, kann man so verfahren. Man schafft

durch (81) z_0 nach i. Dann bemerkt man, daß durch die Transformationsgruppe (82) die Kreise um den „Mittelpunkt“ i (im geodätischen Sinne gemeint!) in sich fortgeschoben werden, also wegen der Invarianz von ϱ_g gegen längentreue Abbildungen feste geodätische Krümmung besitzen, w. z. b. w.

Es gibt aber auch Krümmungskreise, die keinen Mittelpunkt haben, und die sich auf die Halbebene $y > 0$ in Kreisbogen abbilden, die auf der Achse $y = 0$ in reellen Punkten z_0, z_∞ aufsitzen. Daß diese Kurven Abbilder von Krümmungskreisen sind, kann man etwa so einsehen. Man schafft durch (84) die Schnittpunkte z_0, z_∞ nach 0, ∞, wodurch der Kreisbogen in eine vom Ursprung ausgehende Halbgerade übergeht. Die hat aber festes ϱ_g, da sie durch die Substitution

$$z^* = \alpha z; \quad \alpha > 0 \tag{87}$$

in sich fortgeschoben wird. Eine besondere Stellung nehmen noch die Krümmungskreise ein, die in $y > 0$ durch Kreise dargestellt werden, die die x-Achse berühren. Schafft man durch eine Substitution (84) den Berührungspunkt ins Unendliche, so erhält man insbesondere die Geraden $y =$ konst.

Die beiden Kreisfamilien, einerseits die Entfernungskreise und andrerseits die Krümmungskreise decken sich also nicht, sondern es ist die erste Familie ein Teil der zweiten.

Die Maßbestimmung in der Halbebene $y > 0$ durch das Bogenelement

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

spielt eine Rolle in berühmten funktionentheoretischen Untersuchungen von *H. Poincaré* (1854—1912) aus dem Beginn der achtziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts[8]). Wir haben hier eine Verwirklichung der auf *Gauß*, den Russen *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij* (1793 bis 1856) und den Ungarn *Johann Bolyai* (1802—1860) zurückgehenden sogenannten hyperbolischen Geometrie vor uns, einen Zweig der „nicht-Euklidischen“ Geometrie. „Nicht-Euklidische“ Untersuchungen von *Gauß* beginnen 1792, *Bolyai* und *Lobatschefskij* haben etwa 1826 ihre Untersuchungen durchgeführt.

„Nicht-Euklidisch nennts die Geometrie,
spottet ihrer selbst und weiß nicht wie“

hat sich in Anlehnung an Faust *Kurd Lasswitz* über diese Bezeichnung lustig gemacht. —

Man kann sich die hyperbolische Geometrie der Ebene an unsrer Maßbestimmung in der Halbebene $y > 0$ leicht klarmachen.

---

[8]) *H. Poincaré*, Acta mathematica **1**, 1882, S. 1–62.

§ 63. Das Integral der geodätischen Krümmung.

Wir wollen jetzt wieder zur inneren Geometrie einer beliebigen krummen Fläche zurückkehren und den Sonderfall $K =$ konst. verlassen.

Wir betrachten mit *Gauß* das längs einer Kurve genommene Integral ihrer geodätischen Krümmung

$$\int \frac{ds}{\varrho_g}. \tag{88}$$

Von der Kurve wollen wir annehmen, daß sie geschlossen sei, keine mehrfachen Punkte habe und sich durch ihr „Inneres" hindurch stetig auf einen Punkt zusammenziehen lassen soll. Ihr Inneres ist dann *„einfach zusammenhängend"*. Eine Kurve z. B., die um einen Ring herumgeschlungen ist, begrenzt in diesem Sinne keinen einfach zusammenhängenden Teil der Oberfläche. Dagegen umschließt jede doppelpunktsfreie, geschlossene Kurve auf der Kugelfläche zwei solche Flächenstücke.

Wir wollen einen Zusammenhang herleiten zwischen dem Integral der geodätischen Krümmung längs einer solchen Kurve $\mathfrak{C}$ und dem Oberflächenintegral

$$\int K\,do = \int\int \frac{W}{R_1 R_2}\,du\,dv, \tag{89}$$

erstreckt über das „Innere" von $\mathfrak{C}$. Dieses Oberflächenintegral hat ebenfalls *Gauß* eingeführt und als *„Gesamtkrümmung"* (curvatura integra) bezeichnet.

Wir nehmen unsre Kurve $\mathfrak{C}$ als Kurve $v = 0$ eines orthogonalen Parametersystems

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2; \qquad A > 0,\ B > 0 \tag{90}$$

und setzen voraus, daß

$$(\mathfrak{x}_u\, \mathfrak{x}_v\, \xi) > 0. \tag{91}$$

Wir denken unsre Fläche von der Seite betrachtet, daß $\mathfrak{x}_v$ „links" von $\mathfrak{x}_u$ liegt. Der Sinn wachsender u auf $\mathfrak{C}$ soll so gewählt werden, daß das „Innere" von $\mathfrak{C}$ links von $\mathfrak{C}$ liegt, also $\mathfrak{x}_v$ mit der nach innen gerichteten Normalen zusammenfällt. Dann haben wir nach (10)

$$\oint_{\mathfrak{C}} \frac{ds}{\varrho_g} = \oint -\frac{A_v}{AB} A\,du = \oint -\frac{A_v}{B}\,du. \tag{92}$$

Es ist

$$\frac{d}{dv} \oint \frac{ds}{\varrho_g} = \oint -\left(\frac{A_v}{B}\right)_v du.$$

Andrerseits ist die Ableitung des Flächenintegrals

$$\frac{d}{dv} \int K\,do = -\oint K A B\,du.$$

Führt man in die allgemeine Formel § 49 (138) für K unser besonderes Linienelement (90) ein, so wird

$$K = -\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\frac{A_v}{B} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{B_u}{A}\right\}. \tag{93}$$

Somit ist wegen der Geschlossenheit von $\mathfrak{C}$

$$\oint KAB\,du = \oint -\left(\frac{A_v}{B}\right)_v du, \tag{94}$$

also

$$\frac{d}{dv}\left\{\oint \frac{ds}{\varrho_g} + \int K\,do\right\} = 0. \tag{95}$$

Wir denken uns nun die Kurvenschar $v =$ konst. als geschlossene Kurven gewählt, die sich etwa als geodätische Mittelpunktskreise um einen Punkt im Innern von $\mathfrak{C}$ zusammenziehen lassen. Dann wird, wenn man für $1:\varrho_g$ nach (53) und für $ds = \sqrt{G}\cdot d\varphi$ nach (34) die Potenzreihenentwicklung einsetzt und zur Grenze $r = 0$ übergeht,

$$\lim \int \frac{ds}{\varrho_g} = 2\pi, \quad \lim \int K\cdot do = 0. \tag{96}$$

Somit finden wir die wichtige Integralformel, die *O. Bonnet* (1819 bis 1892) im Jahre 1848 entdeckt hat[9]),

$$\boxed{\oint \frac{ds}{\varrho_g} + \int K\,do = 2\pi.} \tag{97}$$

Darin ist das Randintegral links über den Rand des einfach zusammenhängenden Flächenstücks zu erstrecken, auf den sich das Flächenintegral bezieht, und zwar in dem Sinne, daß die Fläche zur Linken bleibt und $1:\varrho_g$ etwa durch $(\xi\,\mathfrak{x}_s\,\mathfrak{x}_{ss})$ auch dem Vorzeichen nach erklärt ist.

Die Formel (97) ist eine der wichtigsten der Flächentheorie. Vermutlich hat schon *Gauß* sie besessen. Daher sprechen manche (sogar französische) Geometer von der „Formel von *Gauß-Bonnet*".

§ 64. Folgerungen aus der Integralformel von *Gauß* und *Bonnet*.

Die Formel (97) gilt zunächst nur für den Fall, daß die Randkurve des einfach zusammenhängenden Flächenstücks eine einzige analytische Kurve ist. Doch bleibt, wie man sofort sieht, die Formel gültig, wenn sich der Rand aus endlich vielen regulären analytischen Bogen glatt zusammensetzt. Schließen zwei Bogen hingegen nicht gleichsinnig tangentiell aneinander, tritt also eine Ecke auf mit dem

[9]) *O. Bonnet*, Journal de l'École Polytechnique **19** (1848), S. 131.

Außenwinkel ω, so kann man diese durch einen kleinen geodätischen Kreis abrunden und dann den Grenzübergang zur Ecke machen. So sieht man, daß die Ecke zum Krümmungsintegral den Beitrag ω liefert.

Wenden wir die Formel *Bonnets* auf den Fall an, daß es sich um ein dreieckiges Flächenstück handelt, das von einem Kurvenbogen von der Länge Δs und den zwei geodätischen Tangenten in den Endpunkten des Bogens begrenzt wird; dann ist (Fig. 19)

$$(98) \qquad -\int \frac{ds}{\varrho_g} + 2\pi + \Delta\tau + \int K\, do = 2\pi .$$

Der Beitrag 2π linker Hand stammt von den Spitzen. $\Delta\tau$ bezeichnet den Winkel zwischen den geodätischen Tangenten.

Die geodätischen Linien dagegen liefern wegen $1:\varrho_g = 0$ keinen Beitrag zum Randintegral. Macht man den Grenzübergang mit $\Delta s \to 0$ und beachtet, daß das Flächenintegral mit Δs^2 klein wird, so findet sich

$$(99) \qquad \frac{1}{\varrho_g} = \lim \frac{\Delta\tau}{\Delta s} .$$

Dabei wird der Ausdruck > 0, wenn die Kurve (wie in der Figur), „links“ von ihren geodätischen Tangenten liegt. (Vergl. § 63). Die Eigenschaft (99) der geodätischen Krümmung entspricht völlig der Grundeigenschaft der gewöhnlichen Krümmung einer Kurve (§ 5).

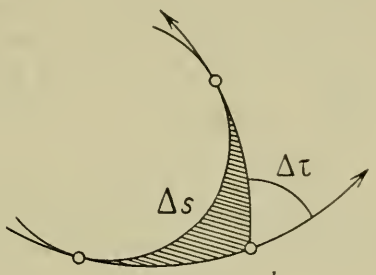


Fig. 19.

Wenden wir die Formel von *Gauß-Bonnet* auf ein „geodätisches Dreieck“ an, das von drei geodätischen Linien begrenzt ist und die Außenwinkel ω_k, also die Innenwinkel $\alpha_k = \pi - \omega_k$ hat, unter der Annahme, daß $K =$ konstant ist, so finden wir, wenn F den Inhalt des Dreiecks bedeutet,

$$\Sigma\, \omega_k + F K = 2\pi$$

oder

$$(100) \qquad F K = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi .$$

Diese Formel von *Gauß* lehrt, daß die Winkelsumme im Dreieck, die für $K = 0$ bekanntlich gleich π ist, für $K > 0$ größer und für $K < 0$ kleiner als π ausfällt.

Es hängt das aufs innigste mit den beiden Arten der nicht-*Euklid*ischen Geometrie zusammen, die wenigstens im Kleinen auf den Flächen festen Krümmungsmaßes verwirklicht werden, wie insbesondere *E. Beltrami* gezeigt hat[10]).

---

[10]) *E. Beltrami*, Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, 1868, Werke I, S. 374–405.

Wir wollen schließlich noch feststellen, welche Aussagen sich auf Grund der Formel von *Bonnet* über die Gesamtkrümmung einer geschlossenen Fläche machen lassen.

Nehmen wir als erstes Beispiel eine Fläche „vom Zusammenhang der Kugel", die also ein eindeutiges und stetiges Abbild der Kugeloberfläche ist. Durch einen doppelpunktfreien geschlossenen Schnitt zerfällt die Fläche in zwei einfach-zusammenhängende Stücke *I*, *II*, auf deren jedes wir unsre Integralformel anwenden können. Es ist

$$\oint \frac{ds}{\varrho_g} + \int_I K \cdot do = 2\pi,$$

$$\oint \frac{ds}{\varrho_g} + \int_{II} K \cdot do = 2\pi.$$

Beidemale ist der Integrationsweg so zu beschreiben, daß das zugehörige Flächenstück *I* oder *II* links bleibt; d. h. die beiden Umlaufssinne sind entgegengesetzt. Also haben zusammengehörige ϱ_g-Werte zur Summe Null. Durch Addition folgt daher

$$\int K \cdot do = 4\pi. \tag{101}$$

Die Gesamtkrümmung einer geschlossenen Fläche vom Zusammenhang der Kugel ist 4π.

Als zweites Beispiel wollen wir eine Fläche vom Zusammenhang einer Ringfläche betrachten. Durch zwei Schnitte kann man die Ringfläche in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück verwandeln, das von einer Randkurve mit vier zusammenfallenden Ecken begrenzt wird. Wendet man den

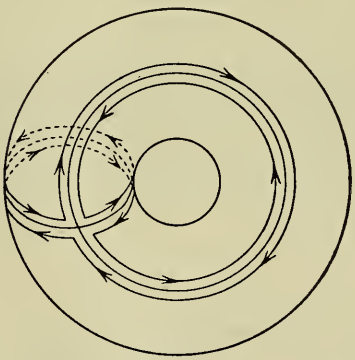


Fig. 20.

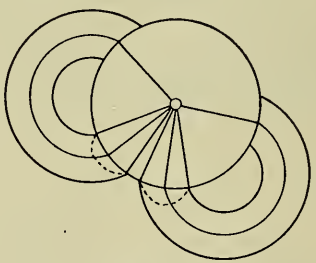


Fig. 21.

*Bonnet*schen Satz auf diese Fläche an, so heben sich die Randintegrale gegenseitig weg, da jedes Randstück zweimal gegensinnig durchlaufen wird (Fig. 20). Es bleiben nur die vier Winkel an den Ecken übrig, die zusammen 2π ergeben. Somit ist

$$\int K \cdot do = 0 \tag{102}$$

für jede Fläche vom Zusammenhang der Ringfläche.

Ganz entsprechend findet man für eine geschlossene Fläche, die man sich (Fig. 21, $p = 2$) als eine Kugel mit p „Henkeln" denken möge, durch die „kanonische Zerschneidung"

$$\int K \cdot do = 4\pi(1 - p). \tag{103}$$

Die ganze Zahl p nennt man nach *Riemann* (1857) das *„Geschlecht"* der Fläche.

§ 65. Über Hüllkurven von geodätischen Linien.

Die Formel (12) von § 22 für die erste Variation der Bogenlänge einer Kurve gibt, angewandt auf eine nur auf einer Fläche bewegliche Kurve[11]), eine Verallgemeinerung der Formel (25) von § 56, nämlich

$$\delta s = -\int_{s_1}^{s_2} \frac{\delta n}{\varrho_g}\, ds + [\delta t]_{s_1}^{s_2}. \tag{104}$$

Dabei bedeuteten δn und δt die Komponenten der Verrückung unsrer Kurve in Richtung der Normalen (in der Tangentenebene) und in Richtung der Tangente. Ist insbesondere die Ausgangskurve geodätisch $(1 : \varrho_g = 0)$, so vereinfacht sich die Formel zu

$$\delta s = [\delta t]_{s_1}^{s_2}. \tag{105}$$

Betrachten wir jetzt eine Schar geodätischer Linien, die eine Kurve $\mathfrak{C}$ senkrecht durchschneiden und eine Kurve $\mathfrak{H}$ einhüllen (Fig. 22), so gibt (105), angewandt auf die geodätischen Bogen zwischen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{H}$, da im Schnittpunkt mit $\mathfrak{C}$

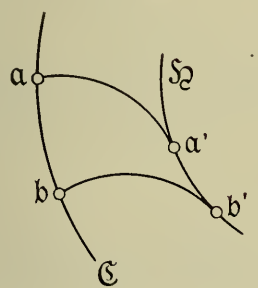


Fig. 22.

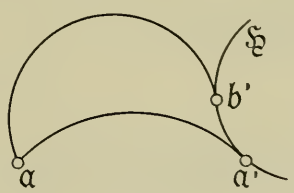


Fig. 23.

$\delta t = 0$ und im Berührungspunkt mit $\mathfrak{H}$ stets δt gleich dem Bogenelement von $\mathfrak{H}$ ist, den *„Hüllkurvensatz"*

$$\widehat{aa'} + \widehat{a'b'} = \widehat{bb'}\ ^{12}). \tag{106}$$

[11]) Trägt man Bedenken, die Formel (12) von § 22 hier anzuwenden, da sie nur für geradlinige Verrückungen abgeleitet wurde, so kann man die folgende Formel (104) natürlich auch so finden, daß man von einer Parameterdarstellung der Fläche ausgeht.

[12]) Für den Fall der ebenen Geometrie ist das ja die bekannte Beziehung zwischen Evolute und Evolvente von § 18 (Fadenkonstruktion).

In Worten: der Zuwuchs der geodätischen Entfernung $\widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$ ist gleich dem entsprechenden Bogen der Einhüllenden.

Das gilt insbesondere auch dann, wenn alle geodätischen Bogen durch denselben Punkt $\mathfrak{a}$ laufen, wenn sich also gewissermaßen die Kurve $\mathfrak{C}$ auf den einzigen Punkt $\mathfrak{a}$ zusammenzieht. Dann wird (vgl. Fig. 23, S. 111)

$$\widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{b}'} + \widehat{\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'} = \widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}\ ^{13}).$$

Es sei noch eine Bemerkung von *H. Poincaré* über die geodätische Krümmung der Einhüllenden $\mathfrak{H}$ hinzugefügt. Nimmt man $\mathfrak{a}$ zum Ursprung eines Systems geodätischer Polarkoordinaten auf der Fläche, so bekommt das Linienelement die Form

$$ds^2 = dr^2 + B^2 d\varphi^2.$$

Längs $\mathfrak{H}$ ist $B(r, \varphi) = 0$. Der Abstand benachbarter geodätischer Radien durch $\mathfrak{a}$ ist $B\,d\varphi$. Deshalb ist

$$\frac{\partial B}{\partial r} d\varphi$$

der „geodätische Kontingenzwinkel" von $\mathfrak{H}$, d. h. der Winkel benachbarter geodätischer Tangenten. Da das entsprechende Bogenelement von $\mathfrak{H}$ gleich dr ist, bekommen wir nach (99) für die geodätische Krümmung von $\mathfrak{H}$ die einfache Formel

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{\partial B}{\partial r} : \frac{dr}{d\varphi}, \tag{107}$$

wenn $r(\varphi)$ die geodätische Entfernung von $\mathfrak{a}$ bis zum nächsten Berührungspunkt mit $\mathfrak{H}$ ist. Da auf $\mathfrak{H}$ $B(r, \varphi) = 0$ ist, erhält man durch Ableitung

$$\frac{\partial B}{\partial r}\frac{dr}{d\varphi} + \frac{\partial B}{\partial \varphi} = 0.$$

Setzt man hieraus den Wert von $dr : d\varphi$ in (107) ein, so erhält man für die geodätische Krümmung von $\mathfrak{H}$ schließlich den Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho_g} = -\left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)^2 : \frac{\partial B}{\partial \varphi}\ ^{14}). \tag{108}$$

§ 66. *Beltramis* erster Differentiator.

Um die geodätische Krümmung einer Flächenkurve bei beliebiger Wahl der Flächenparameter u, v darstellen zu können, ist es zweck-

---

[13]) Nach *G. Darboux* stammen diese Sätze von *Jacobi*. Vgl. *Darboux*, Surfaces III, S. 87.

[14]) Vgl. *H. Poincaré*, American Transactions **6** (1905), S. 241.

mäßig, gewisse Differentiationsprozesse abzuleiten, die gegenüber längentreuen Abbildungen invariant sind, und die gestatten, aus einer auf der Fläche gegebenen Funktion eine zweite zu bestimmen, die mit ihr invariant verknüpft ist.

Ein solches Differentiationsverfahren, das aus einer Funktion $\varphi(u, v)$ auf unsrer Fläche mit dem Bogenelement

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

ein Maß für die Steilheit des Anstieges der Funktion φ an einer Stelle liefert, bekommen wir folgendermaßen. Wir suchen an dieser Stelle den Größtwert von $(d\varphi : ds)^2$, wenn wir ds um den Punkt drehen. Es soll also

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = (\varphi_u u' + \varphi_v v')^2 = \text{Maximum} \tag{109}$$

werden unter der Nebenbedingung

$$\Phi = E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2 = 1. \tag{110}$$

Nach der bekannten Multiplikatorregel von *Euler* und *Lagrange* bildet man

$$\Omega = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - \lambda\,\Phi \tag{111}$$

und sucht die freien Extreme von Ω. Die Gleichungen $\partial\Omega : \partial u' = 0$, $\partial\Omega : \partial v' = 0$ geben

$$\begin{aligned} (\varphi_u u' + \varphi_v v')\,\varphi_u - \lambda(E u' + F v') &= 0 \\ (\varphi_u u' + \varphi_v v')\,\varphi_v - \lambda(F u' + G v') &= 0. \end{aligned} \tag{112}$$

Multipliziert man beide Formeln mit u', v' und addiert, so erhält man

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \lambda. \tag{113}$$

Entfernt man andrerseits u', v' aus den beiden Gleichungen (112). so folgt

$$\lambda(EG - F^2) = E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2.$$

Somit ist

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2_{\text{Maximum}} = \frac{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}{EG - F^2}. \tag{114}$$

Wir wollen für diesen *„ersten Differentiator von Beltrami"*, der schon bei *Gauß* vorkommt,

$$\boxed{\nabla(\varphi, \varphi) = \nabla\varphi = \frac{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}{EG - F^2}} \tag{115}$$

schreiben. ∇ kann man etwa „Nabla" lesen. Die Benennung

„Differentiator“ stammt von *F. Engel*. Es ist auch

$$\nabla\varphi = -\frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} E & F & \varphi_u \\ F & G & \varphi_v \\ \varphi_u & \varphi_v & 0 \end{vmatrix}. \tag{116}$$

Setzen wir an Stelle von φ ein: $\varphi + \mu\psi$, wo μ konst. ist, so wird

$$\nabla(\varphi+\mu\psi,\ \varphi+\mu\psi) = \nabla(\varphi,\varphi) + 2\mu\nabla(\varphi\psi) + \mu^2\nabla(\psi,\psi),$$

worin

$$\boxed{\nabla(\varphi,\psi) = \frac{E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v+\varphi_v\psi_u)+G\varphi_u\psi_u}{EG-F^2}} \tag{117}$$

ist, oder auch

$$\nabla(\varphi,\psi) = -\frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} E & F & \varphi_u \\ F & G & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v & 0 \end{vmatrix}. \tag{118}$$

Nach seiner Herleitung ist $\nabla(\varphi,\psi)$ ebenfalls ein vom Parametersystem u, v unabhängiger Differentialausdruck.

§ 67. *Beltramis* zweiter Differentiator.

Um zu einem weiteren derartigen Differentiationsverfahren zu kommen, gehen wir von einem Variationsproblem auf einer Fläche aus, das die naturgemäße Verallgemeinerung der sogenannten ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie ist. Es soll nämlich auf einem einfach zusammenhängenden Flächenstück eine Funktion φ mit vorgeschriebenen Randwerten so bestimmt werden, daß das Integral

$$D_\varphi = \int\int \nabla(\varphi,\varphi)\, W\, du\, dv \tag{119}$$

möglichst klein ausfällt. Darin bedeutet $W\,du\,dv = do$ das Oberflächenelement. Es sei $\varphi + \varepsilon\psi$ eine Vergleichsfunktion, also ψ auf dem Rande Null. Dann ist

$$D_{\varphi+\varepsilon\psi} = D_\varphi + 2\varepsilon\int\int \nabla(\varphi,\psi)\, W\, du\, dv + \varepsilon^2 D_\psi. \tag{120}$$

Für das Minimum ist notwendig und wegen $D_\psi > 0$ auch hinreichend, daß das mittlere Integral für jedes ψ verschwindet. Man erhält durch Integration nach Teilen unter Berücksichtigung der verschwindenden Randwerte von ψ

$$\int\int \nabla(\varphi,\psi)\, W\, du\, dv = \int\int \frac{(E\varphi_v - F\varphi_u)\psi_v + (G\varphi_u - F\varphi_v)\psi_u}{W}\, du\, dv$$

$$= -\int\int \frac{\psi}{W}\left\{\left(\frac{E\varphi_v - F\varphi_u}{W}\right)_v + \left(\frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{W}\right)_u\right\} W\, du\, dv.$$

Setzen wir

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{1}{W}\left\{\left(\frac{E\varphi_v - F\varphi_u}{W}\right)_v + \left(\frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{W}\right)_u\right\},} \tag{121}$$

so haben wir also gefunden

$$\iint \nabla(\varphi, \psi)\, W\, du\, dv = -\int \psi \cdot \Delta\varphi \cdot W\, du\, dv \tag{122}$$

und als Differentialgleichung für φ

$$\Delta\varphi = 0, \tag{123}$$

die Verallgemeinerung der *Laplace*schen Differentialgleichung für die Ebene

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = 0. \tag{124}$$

Da die Gleichung (122) identisch in φ und ψ gilt, da ferner $W\, du\, dv = do$ und die linke Seite der Gleichung invariante Bedeutung haben, so muß auch $\Delta\varphi$ biegungsinvariant sein. Man nennt $\Delta\varphi$ *Beltrami*s zweiten Differentiator der Funktion φ.

E. Beltrami hat im Anschluß an Untersuchungen von *G. Lamé* seine Differentiatoren in einer hervorragenden Abhandlung aus den Jahren 1864 und 1865 eingeführt[15]).

§ 68. Formeln nach *Green*.

Als erste Anwendung der Differentiatoren sollen zwei Formeln hergeleitet werden, die die Übertragung zweier bekannter Formeln *Green*s auf die Flächentheorie bilden. Es seien φ, ψ zwei Funktionen auf einem einfach zusammenhängenden Flächenstück. Dann ist $(do = W\, du\, dv)$

$$\int \nabla(\varphi, \psi)\, do = \iint (P\psi_u + Q\psi_v)\, du\, dv,$$

wobei

$$P = \frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{W}, \quad Q = \frac{E\varphi_v - F\varphi_u}{W}.$$

Es folgt

$$\int \nabla(\varphi,\psi)\, do = \iint \left\{ \frac{\partial(P\psi)}{\partial u} + \frac{\partial(Q\psi)}{\partial v} \right\} du\, dv - \int \psi \cdot \Delta\varphi \cdot do. \tag{125}$$

Das erste Integral rechts kann man nach der gewöhnlichen, nach *Gauß* oder *Green* benannten Formel in ein Randintegral überführen

$$R = \iint \{(P\psi)_u + (Q\psi)_v\}\, du\, dv = \oint \psi (P\, dv - Q\, du). \tag{126}$$

Dabei ist der Rand so zu durchlaufen, daß das Flächenstück links bleibt ($\mathfrak{x}_v$ links von $\mathfrak{x}_u$). Nehmen wir die im richtigen Sinn umfahrene Randlinie für den Augenblick als u-Kurve eines orthogonalen Parametersystems, so wird

$$R = -\oint \psi \varphi_v \sqrt{\frac{E}{G}}\, du = -\oint \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds, \tag{127}$$

[15]) *E. Beltrami*, Ricerche di analisi applicata alla geometria, Opere I, S. 107—198. Besonders Nr. XIV und XV.

wenn durch $\partial : \partial n$ die Ableitung in Richtung $\mathfrak{x}_v$, also in Richtung der *inneren* Normalen angedeutet wird. Somit haben wir als erste Formel von *Green* gefunden

$$\int \nabla(\varphi, \psi) \cdot do = -\oint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int \psi \cdot \triangle \varphi \cdot do. \tag{128}$$

Vertauscht man φ und ψ unter Beachtung der Symmetrie von $\nabla(\varphi, \psi)$, so folgt durch Abziehen die zweite Formel *Greens*

$$\int \{\varphi \cdot \triangle \psi - \psi \cdot \triangle \varphi\} do + \oint \left\{\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right\} ds = 0. \tag{129}$$

§ 69. Allgemeine Formel für die geodätische Krümmung.

Setzt man das Linienelement in der Form (§ 53)

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2 \tag{5}$$

an, so wird die geodätische Krümmung einer Kurve $v =$ konst. durch den Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho_g} = -\frac{A_v}{AB} \tag{10}$$

dargestellt. Mittels der Differentiatoren kann man sich jetzt leicht von der besonderen Koordinatenwahl befreien. Man findet im vorliegenden Fall

$$\nabla \varphi = \frac{A^2 \varphi_v^2 + B^2 \varphi_u^2}{A^2 B^2} = \left(\frac{\varphi_u}{A}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_v}{B}\right)^2, \tag{130}$$

$$\nabla(\varphi, \psi) = \frac{\varphi_u \psi_v}{A^2} + \frac{\varphi_v \psi_v}{B^2},$$

$$\triangle \varphi = \frac{1}{AB}\left\{\left(\frac{A}{B}\varphi_v\right)_v + \left(\frac{B}{A}\varphi_u\right)_u\right\}, \tag{131}$$

also

$$\nabla v = \frac{1}{B^2}, \tag{132}$$

$$\triangle v = \frac{1}{AB}\left(\frac{A}{B}\right)_v = \frac{A_v}{AB^2} - \frac{B_v}{B^3}, \tag{133}$$

$$\nabla(v, B) = \frac{B_v}{B^2}. \tag{134}$$

Nach den drei Gleichungen (132) bis (134) wird

$$\frac{1}{\varrho_g} = -\frac{\triangle v}{\sqrt{\nabla v}} - \nabla\left(v, \frac{1}{\sqrt{\nabla v}}\right). \tag{135}$$

Allgemein ergibt sich daraus für die geodätische Krümmung einer Kurve $\varphi(u, v) =$ konst. folgender von *Beltrami* (1865, Werke I, S. 176)

angegebene Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho_g} = -\frac{\triangle \varphi}{\sqrt{\nabla \varphi}} - \nabla\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\nabla \varphi}}\right). \tag{136}$$

Diese invariante Formel gilt für beliebige Koordinaten u, v. Ausführlich lautet die Formel, wie *O. Bonnet* 1860 gefunden hat,

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{W}\left\{\left(\frac{F\varphi_v - G\varphi_u}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}}\right)_u + \left(\frac{F\varphi_u - E\varphi_v}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}}\right)_v\right\}. \tag{137}$$

Ist die Flächenkurve in der Form

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

vorgelegt, so erhält man für die geodätische Krümmung

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{W} \cdot \frac{\Gamma}{(E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2)^{3/2}}, \tag{138}$$

worin Γ die Bedeutung hat:

$$\begin{aligned} \Gamma = {} & W^2 (u'v'' - v'u'') \\ & + (E u' + F v')\left[(F_u - \tfrac{1}{2}E_v)u'^2 + G_u u'v' + \tfrac{1}{2}G_v v'^2\right] \\ & - (F u' + G v')\left[\tfrac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + (F_v - \tfrac{1}{2}G_u)v'^2\right]. \end{aligned} \tag{139}$$

Diese Formel findet sich bei *Beltrami* (Werke I, S. 178). Sie hat vor der vorhergehenden den Vorteil, daß keine weitere Verabredung wegen des Vorzeichens nötig ist.

§ 70. Flächen, deren geodätische Krümmungskreise geschlossen sind.

Mittels der eben abgeleiteten Formel für die geodätische Krümmung soll jetzt eine Behauptung von *G. Darboux*[16]) bestätigt werden. *Dafür, daß auf einer Fläche alle Kurven mit fester geodätischer Krümmung geschlossen sind, ist notwendig, daß die Fläche festes Krümmungsmaß besitzt*[17]).

Gehen wir von geodätischen Polarkoordinaten aus (§ 57), und setzen wir das Linienelement in der Form an

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \varphi)\, d\varphi^2, \tag{31}$$

dann ist das Krümmungsmaß

$$K(r, \varphi) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \sqrt{G}. \tag{41}$$

[16]) *G. Darboux*, Théorie des surfaces, III. 1894, S. 151.

[17]) Die Bedingung reicht aber durchaus nicht hin. Trägt man z. B. auf den Tangenten einer Schraubenlinie gleiche Längen ab, so bilden die Endpunkte auf der Tangentenfläche einen offenen Krümmungskreis.

Hieraus folgt umgekehrt für $\sqrt{G}$ unter Benutzung von (35) die Reihe

$$\sqrt{G} = r - \frac{K_0}{3!} r^3 - \frac{2}{4!}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 r^4 + \dots . \tag{140}$$

Für die geodätische Krümmung der Kurve ergibt sich nach (137), wenn man für die dort mit φ bezeichnete Funktion $r(\varphi) - r$ einsetzt,

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{G\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\cdot\left(1 + 2\frac{r'^2}{G}\right) - \sqrt{G}\,r'' + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\varphi}\cdot r'}{G^{3/2}\left(1 + \frac{r'^2}{G}\right)^{3/2}}. \tag{141}$$

Führt man hier den Ausdruck (140) ein, so wird

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{r}\Big\{&\Big(1 - \frac{K_0}{3}r^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial K}{\partial r}\Big)_0 r^3 + \dots\Big)\Big(1 + \frac{2r'^2}{r^2}\Big[1 + \frac{K_0}{3}r^2 + \frac{1}{6}\Big(\frac{\partial K}{\partial r}\Big)_0 r^3 + \dots\Big]\Big)\\ &- \frac{r''}{r}\Big(1 + \frac{K_0}{3}r^2 + \frac{1}{6}\Big(\frac{\partial K}{\partial r}\Big)_0 r^3 + \dots\Big) - \frac{2}{4!}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\frac{\partial K}{\partial r}\Big)_0 r r' + \dots\Big\}\\ &\cdot\Big\{1 + \frac{r'^2}{r^2}\Big(1 + \frac{K_0}{3}r^2 + \frac{1}{6}\Big(\frac{\partial K}{\partial r}\Big)_0 r^3 + \dots\Big)\Big\}.\end{aligned} \tag{142}$$

Setzt man hierin ϱ_g konstant, so hat man die Differentialgleichung der „Krümmungskreise" vor sich.

Da für kleines ϱ_g der Krümmungskreis nahezu ein ebener Kreis wird, liegt es nahe, für r eine Entwicklung nach Potenzen von ϱ_g in der Form anzusetzen

$$r = \varrho_g + b(\varphi)\varrho_g^2 + c(\varphi)\varrho_g^3 + d(\varphi)\varrho_g^4 + \dots . \tag{143}$$

Gehen wir mit dieser Reihe in die Formel (142) hinein, so bekommen wir durch Koeffizientenvergleichung Differentialgleichungen für die Funktionen $b(\varphi)$, $c(\varphi)\dots$. Zunächst erhält man

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{\varrho_g}\{1 - (b + b'')\varrho_g + \dots\},$$

also

$$b + b'' = 0. \tag{144}$$

Wir können also $b = 0$ setzen. Dann erhalten wir

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{\varrho_g}\left\{1 - \left(c + c'' + \frac{K_0}{3}\right)\varrho_g^2 - \left(d + d'' + \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial K}{\partial r}\Big)_0\varrho_g^3 + \dots\right)\right\}$$

und daraus für c und d die Differentialgleichungen

$$\begin{cases} c'' + c = -\frac{K_0}{3}, \\ d'' + d = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0. \end{cases} \tag{145}$$

Alle Lösungen der ersten haben die Periode 2π

$$c = -\frac{K_0}{3} + A\cos\varphi + B\sin\varphi. \tag{146}$$

Anders bei der zweiten! Die rechte Seite hat, wenn man als Richtung $\varphi = 0$ die Richtung stärksten Anstiegs von K nimmt, die Form

$$\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 = \left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_{\text{Maximum}} \cdot \cos\varphi = C\cos\varphi. \tag{147}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$d'' + d = -\frac{C}{4}\cos\varphi$$

ist

$$d = -\frac{C}{8}\varphi\sin\varphi + A\cos\varphi + B\sin\varphi, \tag{148}$$

wo A, B beliebige Konstante bedeuten.

Verlangen wir nun, daß sich die Krümmungskreise (143) alle schließen, so müssen die b, c, d, ... die Periode 2π (oder $2n\pi$) haben. Das ist bei d nur möglich, wenn $C = 0$ ist. Dann haben wir

$$\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)_0 = 0. \tag{149}$$

Also hat K im Ursprung $r = 0$ einen stationären Wert. Da diese Stelle keine ausgezeichnete Rolle auf der Fläche spielt, sondern beliebig gewählt werden kann, so muß K konstant sein, wie zu Anfang behauptet wurde.

Daß die Bedingung $K = \text{konst.}$ für die Geschlossenheit nicht völlig hinreicht, kann man aus § 62 entnehmen[18]).

§ 71. Isotherme Parameter.

Es liegt die Frage nahe, ob man jedes Bogenelement

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

durch Einführung neuer Parameter p, q auf die sogenannte „isotherme" Form

$$ds^2 = \lambda(p, q)\cdot(dp^2 + dq^2) \tag{150}$$

bringen kann. In diesem Fall nimmt der zweite Differentiator (121) die besonders einfache Form an:

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_{pp} + \varphi_{qq}}{\lambda}, \tag{151}$$

sodaß also

$$\Delta p = \Delta q = 0 \tag{152}$$

ist. Die isothermen Parameter $p(u, v)$, $q(u, v)$ genügen also beide

[18]) Die Entwicklungen dieses Abschnitts sind einer vom Verfasser veranlaßten Arbeit von *B. Baule* entnommen, auf die später noch zurückgekommen werden soll: Über Kreise und Kugeln im *Riemann*schen Raum I, Math. Annalen **83** (1921), S. 286—310.

derselben linearen, homogenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, der Verallgemeinerung der Differentialgleichung von *Laplace*.

Um den Zusammenhang zwischen p und q zu bekommen, berechnen wir uns auch noch die ersten Differentiatoren nach (115) und (117)

$$\nabla\varphi = \frac{\varphi_p^2 + \varphi_q^2}{\lambda}, \tag{153}$$

$$\nabla(\varphi, \psi) = \frac{\varphi_q \psi_q + \varphi_p \psi_p}{\lambda}, \tag{154}$$

also

$$\nabla p = \nabla q = \frac{1}{\lambda},$$

$$\nabla(p, q) = 0.$$

Die letzte Gleichung lautet ausführlich in den Veränderlichen u, v (vgl. 117)

$$(E p_v - F p_u) q_v + (G p_u - F p_v) q_u = 0. \tag{155}$$

Daraus ist

$$q_u = -\mu(E p_v - F p_u),$$
$$q_v = +\mu(G p_u - F p_v).$$

Bildet man linker Hand $\nabla q(u, v)$, so folgt wegen $\nabla p = \nabla q$

$$\mu^2 = \frac{1}{EG - F^2}. \tag{156}$$

Somit haben wir

$$\begin{cases} q_u = -\dfrac{E p_v - F p_u}{W}, \\ q_v = +\dfrac{G p_u - F p_v}{W} \end{cases} \tag{157}$$

und umgekehrt

$$\begin{cases} p_u = +\dfrac{E q_v - F q_u}{W}, \\ p_v = -\dfrac{G q_u - F q_v}{W}. \end{cases} \tag{158}$$

Ist insbesondere schon das System u, v isotherm, so vereinfachen sich unsre Formeln zu

$$p_u = +q_v, \quad p_v = -q_u, \tag{159}$$

wenn man etwa $W > 0$ nimmt. Diese Gleichungen sind das System der Differentialgleichungen von *Cauchy* und *Riemann* aus der Funktionentheorie; die Formeln (157) oder (158) sind also als die Verallgemeinerung dieses Gleichungssystems anzusehen.

Ist eine Lösung p von $\triangle p = 0$ bekannt, so bekommt man die dazugehörigen q durch Integration über ein vollständiges Differential:

$$q = \int \frac{-(E p_v - F p_u)\, du + (G p_u - F p_v)\, dv}{W}. \tag{160}$$

Es ist ja gerade der Inhalt der Voraussetzung $\triangle p = 0$ oder

$$\left(\frac{E p_v - F p_u}{W}\right)_v + \left(\frac{G p_u - F p_v}{W}\right)_u = 0, \tag{161}$$

daß der Ausdruck unterm Integralzeichen in (160) ein vollständiges Differential bedeutet.

Die komplexe Verbindung $z = p + iq$ zweier zusammengehöriger isothermer Parameter bezeichnet man als eine komplexe analytische Funktion auf unsrer Fläche. Ist $w = f(z) = u + iv$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen z, so ist

$$dw = f'(z)\,dz,$$

also

$$|dw| = |f'(z)|\,\frac{ds}{\sqrt{\lambda}},$$

$$ds^2 = \frac{\lambda}{|f'(z)|^2}(du^2 + dv^2). \tag{162}$$

Das Bogenelement hat wieder die isotherme Form, d. h. w ist wieder eine analytische Funktion auf unsrer Fläche.

Die Gleichung $dz = dp + i\,dq = 0$ oder $z = \text{konst.}$ liefert wegen $ds^2 = (dp + i\,dq)(dp - i\,dq) = 0$ auf unsrer Fläche eine Schar von imaginären Kurven mit der Länge Null, die wir in § 19 als isotrope Kurven bezeichnet haben. So kann man die Bestimmung der isothermen Funktionen p, q und der komplexen analytischen Funktionen auf einer Fläche auf die Ermittlung der isotropen Kurven der Fläche zurückführen, wenn man die Flächen von vornherein als analytisch voraussetzt.

Macht man nur Differenzierbarkeitsannahmen, so ist der Existenzbeweis für die Lösungen der Differentialgleichung $\triangle p = 0$ mit Schwierigkeiten verbunden[19]).

§ 72. Winkeltreue Abbildung.

Sind p und q zwei zusammengehörige isotherme Parameter auf einer Fläche, hat also das Linienelement die Form

$$ds^2 = \lambda(dp^2 + dq^2),$$

so bekommt man eine winkeltreue Abbildung unserer Fläche auf die Ebene, wenn man p und q als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene deutet. Der Winkel φ zweier Richtungen $d\mathfrak{x}$ und $\delta\mathfrak{x}$ auf der Fläche bestimmt sich durch die Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{d\mathfrak{x}\cdot\delta\mathfrak{x}}{ds\cdot\delta s}.$$

---

[19]) Wegen der Literatur über diesen Gegenstand vgl. man *L. Lichtenstein*, Zur Theorie der konformen Abbildung . . ., Bulletin de l'académie de Cracovie 1916. S. 192—217.

Das gibt bei Einführung unserer isothermen Parameter den Winkel der entsprechenden Richtungen in der p, q-Ebene. (Vgl. die Ableitung am Schluß von § 61.)

Um jetzt *alle* winkeltreuen Abbildungen unserer Fläche auf die Ebene aufzustellen, genügt es — wegen der Zusammensetzbarkeit der winkeltreuen Abbildungen —, alle winkeltreuen Abbildungen der p, q-Ebene auf sich selbst zu ermitteln. Es seien p, q und u, v zwei in einer winkeltreuen Abbildung mit Erhaltung des Umlaufsinnes („eigentlich" winkeltreu) entsprechende Punkte. Dann muß die Matrix der Substitution

$$dp = p_u\,du + p_v\,dv$$
$$dq = q_u\,du + q_v\,dv$$

einer eigentlich orthogonalen Matrix proportional sein. Das gibt die Gleichungen

(163) $$p_u = +q_v, \qquad p_v = -q_u$$

von *Cauchy* und *Riemann*, die aussagen, daß $z = p + iq$ analytisch von $w = u + iv$ abhängt: $z = f(w)$. Bezeichnet man mit $\bar{w}$ die zu w konjugiert komplexe Zahl, so werden durch die analytischen Beziehungen

(164) $$z = f(w)$$

und

(165) $$z = f(\bar{w})$$

die allgemeinsten winkeltreuen Abbildungen der Ebene dargestellt, wo (165) als „uneigentlich" winkeltreue Abbildung bezeichnet wird.

Ist allgemeiner $z = p + iq$ eine analytische Funktion auf einer krummen Fläche und $w = u + iv$ eine analytische Funktion auf einer zweiten Fläche, so wird durch die Beziehungen (164) und (165) die allgemeinste winkeltreue Abbildung der beiden Flächen aufeinander vermittelt.

Die Aufgabe, die winkeltreuen Abbildungen, die man nach einem Vorschlag von *Gauß* (1843) auch „konform" nennt, zu bestimmen, entstand bei der Herstellung ebener „Landkarten" von krummen Flächen. So haben schon die alten Griechen die „*stereographische Projektion*" der Kugel besessen, bei der die Kugel (vgl. Fig. 34, S. 167).

(166) $$x_1 = \sin\vartheta\cos\varphi, \qquad x_2 = \sin\vartheta\sin\varphi, \qquad x_3 = \cos\vartheta$$

winkeltreu auf die pq-Ebene abgebildet wird

(167) $$p = \frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{1+\cos\vartheta}, \qquad q = \frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{1+\cos\vartheta}.$$

Nach besonderen Untersuchungen von *G. Mercator* (1512—1594) und *J. H. Lambert* (1728—1777) haben dann *Lagrange, Euler* und *Gauß* die allgemeine Theorie entwickelt.

§ 73. Die Förderung der Flächentheorie durch *Gauß*.

Von *Gauß* gibt es zwei bedeutende Abhandlungen zur Flächentheorie. Die erste hat *Gauß* 1822 als Preisschrift der Kopenhagener Akademie eingereicht. Sie ist 1825 erschienen unter dem Titel „die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird" (Werke Bd. 4, S. 189—216). Ungleich wichtiger als diese Arbeit über die winkeltreue Abbildung ist die zweite *Gauß*ische Schrift zur Flächentheorie, die 1827 erschienen ist, die „Disquisitiones generales circa superficies curvas" (Werke Bd. 4, S. 220—258). Beide Abhandlungen sind nicht aus reinem Denken entstanden, sondern Ergebnisse seiner geodätischen Arbeiten bei der von ihm geleiteten Vermessung von Hannover (1821—1841).

Das Hauptergebnis der „Disquisitiones", nämlich die Biegungsinvarianz des Krümmungsmaßes, hat *Gauß* schon 1816 gekannt und 1822 an der isothermen Form des Bogenelements hergeleitet.

Erst 1826 gelang ihm die allgemeine Herleitung des Krümmungsmaßes aus einem beliebig vorgeschriebenen Bogenelement.

Die Verbiegung von Flächen ist schon vor *Gauß* von *Euler* und *Monge* untersucht worden; und zwar haben beide nach den krummen Flächen gefragt, die auf die Ebene längentreu abbildbar sind. Die geodätische Krümmung („Seitenkrümmung") und ihr Integral ist zuerst von *Gauß* behandelt worden (Werke Bd. 8, S. 386). Vielleicht hat er auch schon die Integralformel (97) von *Bonnet* besessen, die den Zusammenhang zwischen der Flächentheorie und der nicht-*Euklid*ischen Geometrie herstellt, zu der ebenfalls *Gauß* den Grund gelegt hat.

Die „Disquisitiones" haben als erster großer Fortschritt in der Flächentheorie seit *Monge* einen bedeutenden Einfluß auf die Entwicklung der Geometrie gehabt. So haben sich Arbeiten von *Minding*, *Mainardi*, *Codazzi*, *Bonnet* und *Jacobi* angeschlossen. Die wichtigste Weiterbildung der Gedanken von *Gauß* hat aber *B. Riemann* in seinem Habilitationsvortrag von 1854 gegeben, auf den wir später eingehend zurückkommen werden.

Eine geschichtliche Würdigung der geometrischen Leistungen des „Princeps mathematicorum" findet man in der Schrift von *P. Stäckel*, C. F. Gauß als Geometer, Leipzig 1918.

§ 74. Aufgaben und Lehrsätze.

1. Eine geometrische Deutung des Krümmungsmaßes. Bedeutet $S(\varepsilon)$ die Bogenlänge einer Parallelkurve zu einer geodätischen Linie im geodätischen Abstand ε, so ist

$$\frac{d^2 S(0)}{d\varepsilon^2} = -\int K ds, \tag{168}$$

wenn K die Werte des Krümmungsmaßes längs der geodätischen Linie bedeuten. Vgl. im Folgenden § 83 und *F. Engel*, Leipziger Berichte **53** (1901), S. 409.

2. **Besondere Form der Gleichung der geodätischen Linien.** Ist eine Fläche auf geodätische Parameter bezogen, so daß

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2$$

ist, so beschreibt ein Flächenpunkt u, v dann eine geodätische Linie auf der Fläche, wenn der Winkel α, unter dem die u-Kurven ($v =$ konst.) von der geodätischen Linie geschnitten werden, der Beziehung genügt

$$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}. \tag{169}$$

Gauß, Werke IV. S. 244.

3. **Eine geometrische Deutung von *Beltramis* Differentiator $\triangle$.** Es sei φ eine Funktion auf einer krummen Fläche, s_1, s_2 die Bogenlängen zweier in einem Punkt sich schneidender Flächenkurven, g_1 und g_2 deren geodätische Krümmungen im Schnittpunkt. Dann gilt dort

$$\triangle\varphi = \frac{d^2\varphi}{ds_1^{\,2}} + \frac{d^2\varphi}{ds_2^{\,2}} + g_2 \frac{d\varphi}{ds_1} + g_1 \frac{d\varphi}{ds_2}. \tag{170}$$

E. Cesàro, Lezioni di geometria intrinseca, Napoli 1896, S. 165.

4. ***J. Liouvilles* Ausdruck für das Krümmungsmaß.** Es seien $1:\varrho_u$, $1:\varrho_v$ die geodätischen Krümmungen der Parameterlinien $v =$ konst., $u =$ konst. auf einer Fläche und Ω der Winkel der Parameterlinien. Dann ist

$$K = \frac{1}{W}\left\{\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\varrho_v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\varrho_u}\right)\right\}. \tag{171}$$

J. Liouville, Paris C. R. **32.** 1851, S. 533.

5. **Ein Satz von *Liouville* über geodätische Linien.** Gibt es auf einer Fläche zwei Felder geodätischer Linien, die sich unter festem Winkel schneiden, so ist die Fläche eine Torse ($K = 0$). *G. Darboux*, Surfaces III, S. 422, 423.

6. **Ein Ausdruck von *Liouville* für die geodätische Krümmung.** Es seien $1:\varrho_u$, $1:\varrho_v$ die geodätischen Krümmungen eines Systems von orthogonalen Parameterlinien. Dann gilt für die geodätische Krümmung einer Kurve, die die u-Linien ($v =$ konst.) unter dem Winkel τ durchsetzt,

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{d\tau}{ds} + \frac{\cos\tau}{\varrho_u} + \frac{\sin\tau}{\varrho_v}. \tag{172}$$

Vgl. *Monges* „Application . . .“ von 1850, S. 575.

7. **Flächen von *Liouville*.** Hat das Linienelement einer Fläche die Form

$$ds^2 = \{\varphi(u) + \psi(v)\}(du^2 + dv^2), \tag{173}$$

so sind die geodätischen Linien durch die Gleichung gegeben

$$\int \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)-a}} - \int \frac{dv}{\sqrt{\psi(v)-a}} = b, \tag{174}$$

in der a, b Konstante bedeuten. (Ebenda S. 577—582.) Es ist zu zeigen: Die Drehflächen und die F_2 gehören zu den Flächen *Liouvilles*.

8. **Die geodätischen Linien als Charakteristiken.** Die geodätischen Linien einer Fläche sind die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung $\nabla\varphi = 1$. Kennt man eine Schar von Lösungen $\varphi(u, v, c)$, so genügen die geodätischen Linien der Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial c} = \text{konst.} \tag{175}$$

9. **Mechanische Verwirklichung geodätischer Linien.** Eine Stahllamelle mit rechteckigem Querschnitt, die, in die Ebene ausgebreitet, geradlinig ist, ergibt, wenn man sie mit ihrer Breitseite längs einer krummen Fläche anlegt, eine geodätische Linie dieser Fläche. „Hochkant" gestellt ergibt sie hingegen eine Asymptotenlinie der Fläche. *S. Finsterwalder*, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. Jahresbericht d. Dtsch. Math. Vereinigung. **6.** 1899, S. 45—90.

10. **Ein Satz von *Gauß* über kleine geodätische Dreiecke.** Es seien α_i die Innenwinkel, a_i die gegenüberliegenden Seiten, K_i die Krümmungsmaße in den Ecken, F der Flächeninhalt eines kleinen geodätischen Dreiecks. Dann ist der Quotient

$$\frac{\alpha_i - \frac{F}{12}\{K_i + K_1 + K_2 + K_3\}}{\sin a_i} \tag{176}$$

nahezu unabhängig von i $(= 1, 2, 3)$. *Gauß*, Disquisitiones . . ., Werke IV, S. 257; den Sonderfall $K_i = K$ hat *Legendre* angegeben.

11. **Geodätische Kegelschnitte auf einer Fläche.** Die Kurven auf einer Fläche, die die Eigenschaft haben, daß die Summe oder Differenz der geodätischen Entfernungen ihrer Punkte von zwei festen Kurven konstant ist, bilden ein Orthogonalsystem, das die konfokalen Kegelschnitte als Sonderfall enthält. Das Bogenelement in bezug auf dieses Orthogonalsystem kann auf die Form gebracht werden

$$ds^2 = \frac{du^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}} + \frac{dv^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}}. \tag{177}$$

Solche „Kegelschnitte" können nur dann ein Isothermensystem bilden, wenn das Linienelement sich auf die Form von *Liouville* (Aufg. 7) bringen läßt. *U. Dini*, Annali di matematica **3**, 1869, S. 269.

12. **Ein Satz von *G. Darboux* über geodätische Kegelschnitte.** Läßt sich ein Orthogonalsystem auf zwei verschiedene Arten als

System geodätischer Kegelschnitte deuten, so ist diese Deutung auf unendlich viele Arten möglich. Das Linienelement läßt sich auf die Form von *Liouville* bringen. *G. Darboux,* Surfaces III, S. 19.

13. **Eine kennzeichnende Eigenschaft der Flächen festen Krümmungsmaßes.** Läßt sich eine Fläche im kleinen so auf die Ebene abbilden, daß dabei die geodätischen Linien in die Geraden der Ebene übergehen, so hat die Fläche notwendig festes Krümmungsmaß. *E. Beltrami,* 1866, Opere I, S. 262—280; vgl. auch *G. Darboux,* Surfaces III, S. 40—44.

14. **Flächen mit geodätischen Schattengrenzen.** Es sind die Flächen zu ermitteln, die nicht Torsen sind, und die von allen umschriebenen Zylindern längs geodätischer Linien berührt werden.

5. Kapitel.

Fragen der Flächentheorie im Großen.

§ 75. Unverbiegbarkeit der Kugel.

Ein genügend kleines Flächenstück läßt stets längentreue Formänderungen zu. Anders ist es bei Flächen in ihrer Gesamterstreckung, wenigstens, sobald wir an unseren früheren Regularitätsvoraussetzungen festhalten. So hat schon 1838 *F. Minding* als Vermutung ausgesprochen[1]) daß die Kugelfläche als Ganzes „starr" ist. Aber erst 1899 hat *H. Liebmann* diese Behauptung begründen können[2]). Auf die allgemeinen Sätze, die damals *H. Minkowski* schon gefunden, aber noch nicht veröffentlicht hatte, kommen wir später zurück. Da nach *Gauß* bei längentreuen Abbildungen das Krümmungsmaß erhalten bleibt, läßt sich der Satz *Liebmanns* so fassen:

Die einzige geschlossene Fläche mit festem Gaußischen Krümmungsmaß ist die Kugel.

Ohne einschränkende Reguläritätsannahmen ist die Behauptung sicher nicht richtig. Schneiden wir nämlich eine Kugelkappe ab und ersetzen sie durch ihr Spiegelbild an der Schnittebene, so erhalten wir eine „eingedrückte Kugel", die zwar konstantes Krümmungsmaß hat, aber eine Kante besitzt. Wir wollen indessen daran festhalten, daß es sich um durchweg reguläre analytische Flächen handeln soll. Allerdings ließe sich der folgende Beweis, der von *D. Hilbert* stammt[3]), auch leicht unter etwas weiteren Voraussetzungen führen.

Führt man auf einer Fläche die Krümmungslinien als Parameterlinien ein ($F = M = 0$), so nehmen die Formeln von *Weingarten*

[1]) *F. Minding*, Über die Biegung krummer Flächen, Crelles Journal 18 (1838), S. 365—368, bes. S. 368.

[2]) *H. Liebmann*, Eine neue Eigenschaft der Kugel, Göttinger Nachrichten 1899, S. 44—55. Der Beweisversuch von *J. H. Jellet* 1854 ist unzureichend.

[3]) *D. Hilbert*, Über Flächen von konstanter *Gauß*scher Krümmung, abgedruckt in *Hilberts* Grundlagen der Geometrie. 3. Aufl., Leipzig und Berlin 1909, Anhang V.

(§ 46 (120)) die Gestalt an

$$\xi_u = -\frac{L}{E}\mathfrak{x}_u, \qquad \xi_v = -\frac{N}{G}\mathfrak{x}_v. \tag{1}$$

Nach *Olinde Rodrigues* (§ 37 (49)) war längs einer Krümmungslinie

$$d\mathfrak{x} + R\,d\xi = 0.$$

Wir haben also für die Hauptkrümmungshalbmesser

$$R_1 = \frac{E}{L}, \qquad R_2 = \frac{G}{N}. \tag{2}$$

Die *Gauß*sche Formel (§ 49 (138)) vereinfacht sich dann zu

$$K = \frac{LN}{EG} = -\frac{1}{\sqrt{E}\sqrt{G}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right\} \tag{3}$$

und die von *Codazzi* (§ 49 (139))

$$\begin{aligned} L_v &= \tfrac{1}{2}E_v\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right), \\ N_u &= \tfrac{1}{2}G_u\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Wir wollen den Satz *Liebmanns* etwa unter der Voraussetzung $K = 1$ beweisen. $K = 0$ müssen wir nämlich ausschließen; denn die Torsen enthalten geradlinige Erzeugende, sind also sicher offene Flächen. Ebenso ergibt $K < 0$ keine geschlossenen Flächen, da in einem „höchsten" Punkt (etwa $x_3 =$ Maximum) der Fläche $K > 0$ sein müßte. Es bleibt somit nur $K > 0$ zu behandeln und durch eine Ähnlichkeit läßt sich immer $K = 1$ oder $R_1 \cdot R_2 = 1$ erreichen. Wir können dann setzen

$$R_1 = th\,\sigma, \qquad R_2 = cth\,\sigma, \tag{5}$$

wo die „Hyperbelfunktionen" *th* und *cth* so erklärt sind:

$$th\,\sigma = \frac{e^{+\sigma} - e^{-\sigma}}{e^{+\sigma} + e^{-\sigma}}, \qquad cth\,\sigma = \frac{e^{+\sigma} + e^{-\sigma}}{e^{+\sigma} - e^{-\sigma}}.$$

Aus (2) folgt

$$L = \frac{E}{th\,\sigma}$$

und daraus

$$L_v = \frac{E_v}{th\,\sigma} - \frac{E\,\sigma_v}{sh^2\sigma}, \tag{6}$$

worin

$$sh\,\sigma = \tfrac{1}{2}(e^{+\sigma} - e^{-\sigma}), \qquad ch\,\sigma = \tfrac{1}{2}(e^{+\sigma} + e^{-\sigma}),$$

$$th\,\sigma = \frac{sh\,\sigma}{ch\,\sigma}$$

ist. Vergleicht man mit dem, was aus (4) folgt, wenn man darin σ einführt, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}\frac{E_v}{E} = \sigma_v\,cth\,\sigma.$$

Entsprechend erhält man

$$\frac{1}{2}\frac{G_u}{G} = \sigma_u \, th\, \sigma .$$

Diese beiden Gleichungen ergeben integriert

$$\sqrt{E} = sh\,\sigma \cdot U(u), \qquad \sqrt{G} = ch\,\sigma \cdot V(v). \tag{7}$$

Nimmt man an Stelle von u, v die Veränderlichen

$$\bar{u} = \int U\,du, \qquad \bar{v} = \int V\,dv,$$

so wird

$$\bar{E} = \frac{E}{U^2}, \qquad \bar{G} = \frac{G}{V^2}.$$

An Stelle der Formeln (7) treten, wenn man die Striche nachträglich wieder fortläßt, die einfacheren

$$\sqrt{E} = sh\,\sigma, \qquad \sqrt{G} = ch\,\sigma. \tag{8}$$

Führt man diese Ausdrücke in die *Gauß*sche Formel (3) ein, so erhält man für σ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial v^2} = -\,sh\,\sigma\,ch\,\sigma = \frac{1}{4}\left(e^{-2\sigma} - e^{+2\sigma}\right). \tag{9}$$

Jetzt benutzen wir die Voraussetzung der Geschlossenheit. Ist durchweg $R_1 = R_2 = 1$, so hat die Fläche nur Nabelpunkte, ist also nach § 38 eine Kugel. Ist $R_1 \neq R_2$, so kann etwa der kleinere R_1 der Hauptkrümmungshalbmesser als eine stetige Funktion auf der Fläche angesehen werden. Somit erreicht R_1 wegen der Geschlossenheit der Fläche an einer Stelle $\mathfrak{p}$ den kleinsten Wert. Dieser Wert R_1 wäre < 1, wenn die Fläche nicht Kugelgestalt hätte. Da dann $\mathfrak{p}$ kein Nabelpunkt wäre, so würden die Krümmungslinien in der Umgebung von $\mathfrak{p}$ ein reguläres Parameternetz bilden und die vorhin abgeleiteten Formeln anwendbar sein. Durchläuft σ die Werte von 0 bis $+\infty$, so nimmt $R_1 = th\,\sigma$ wachsend die Werte von 0 bis 1 an. σ hätte also in $\mathfrak{p}$ jedenfalls einen positiven Kleinstwert. Somit wäre $\sigma_{uu} \cdot \sigma_{vv} \geqq 0$ in $\mathfrak{p}$. Andrerseits wäre die linke Seite von (9) sicher < 0. D. h. diese Gleichung (9) führt auf einen Widerspruch, es sei denn, daß unsre Fläche eine Kugel ist.

Damit ist der Nachweis beendet. Man kann das Ergebnis unsres Beweisgangs auch so fassen: *Innerhalb eines Flächenstücks von fester positiver Krümmung kann an einer Stelle, die kein Nabelpunkt ist, keiner der Hauptkrümmungshalbmesser einen größten oder kleinsten Wert haben.*

Es sei nebenbei erwähnt: Schneidet man in eine Kugelfläche

ein beliebig kleines Loch, so wird die übrig bleibende Fläche verbiegbar[4]).

§ 76. Die Kugeln als einzige Eiflächen mit fester mittlerer Krümmung.

Ein ganz ähnlicher Satz wie der im vorigen Abschnit gilt auch für den Fall, daß an Stelle des Krümmungsmaßes die mittlere Krümmung

$$2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

längs der Fläche fest sein soll, wie ebenfalls *H. Liebmann* gefunden hat[5]).

Eine geschlossene konvexe Fläche, die wir als durchweg regulär und analytisch, ferner als überall positiv gekrümmt ($K > 0$) annehmen wollen, soll kurz eine *„Eifläche"* heißen. Dann lautet der zu beweisende Satz:

Die einzigen Eiflächen mit fester mittlerer Krümmung sind die Kugeln.

Man kann diese Behauptung durch einen von *O. Bonnet* 1867 angegebenen Kunstgriff auf die Überlegungen des § 75 zurückführen, wenn man bemerkt: *Unter den Parallelflächen einer Fläche festen positiven Krümmungsmaßes gibt es eine mit fester mittlerer Krümmung und umgekehrt.*

Es sei nämlich $\mathfrak{x}(u, v)$ eine Fläche mit $K = 1$, ξ der Einheitsvektor ihrer Flächennormalen. Dann hat die Parallelfläche

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - \xi \tag{10}$$

die mittlere Krümmung $2\bar{H} = 1$. In der Tat! Für die Krümmungslinien von $(\mathfrak{x})$ gilt nach *O. Rodrigues*

$$d\mathfrak{x} + R\,d\xi = 0,$$

oder

$$d\bar{\mathfrak{x}} + (R+1)\,d\xi = 0.$$

Den Krümmungslinien auf $(\mathfrak{x})$ entsprechen wegen $\bar{\xi} = \xi$ wieder Krümmungslinien auf $(\bar{\mathfrak{x}})$. Für entsprechende Hauptkrümmungshalbmesser gilt

$$\bar{R} = R + 1. \tag{11}$$

Somit ist wegen

$$R_1 R_2 = 1$$

$$2\bar{H} = \frac{1}{\bar{R}_1} + \frac{1}{\bar{R}_2} = \frac{1}{R_1+1} + \frac{1}{R_2+1} = 1. \tag{12}$$

Ebenso verläuft die umgekehrte Schlußweise.

---

[4]) *H. Liebmann*, Die Verbiegung von geschlossenen und offenen Flächen positiver Krümmung, Münchener Berichte 1919, S. 267—291.

[5]) *H. Liebmann*, Über die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung. Math. Annalen **53** (1900), S. 81—112; bes. § 6. S. 107.

Haben wir nun eine Eifläche mit $2\bar{H} = 1$, so gilt

$$\frac{1}{R_1} > 0, \qquad \frac{1}{R_2} > 0; \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 1.$$

Somit wäre, wenn die Eifläche nicht Kugelgestalt hätte,

$$\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{R}\right)_{\text{Max}} < 1$$

oder

$$1 < (\bar{R})_{\text{Min}} < 2.$$

Für den zugehörigen Hauptkrümmungshalbmesser

$$R = \bar{R} - 1$$

der Fläche $(\mathfrak{x})$ mit $K = 1$ hätten wir

$$0 < (R)_{\text{Min}} < 1$$

im Widerspruch mit dem Schlußergebnis von § 75. Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 77. Starrheit der Eiflächen.

Der Satz von der Starrheit der Kugel soll in engerem Umfang jetzt auch für beliebige Eiflächen (§ 76) bewiesen werden. Dieses Ergebnis verdankt man wiederum *H. Liebmann*[6]). Der folgende Beweis stammt von *H. Weyl* und dem Verfasser[7]). Der fragliche Lehrsatz läßt sich etwa so fassen:

Soll eine Eifläche stetig und längentreu verändert werden, so ist sie nur als starrer Körper beweglich.

Von dieser „Abänderung" wird vorausgesetzt, daß sie sich folgendermaßen darstellen läßt. Es sei $\mathfrak{x}(u, v)$ eine Parameterdarstellung eines Stückes der Eifläche. Wir setzen

$$\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{x}(u, v; 0); \tag{13}$$

und $\mathfrak{x}(u, v; t)$ sei in allen drei Veränderlichen analytisch. Den verschiedenen t-Werten entsprechen die verschiedenen Lagen unsrer veränderten Fläche. Die Teilableitung nach t sei im folgenden durch ein vorgesetztes δ gekennzeichnet. Soll dann die Abänderung so erfolgen, daß die Bogenlängen der auf den Flächen $t =$ konst. gezogenen Kurven erhalten bleiben, so muß

$$\delta(ds^2) = \delta(d\mathfrak{x})^2 = 0 \tag{14}$$

sein. Oder es muß, wenn man für

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} = \mathfrak{d}$$

---

[6]) *H. Liebmann*, Göttinger Nachrichten 1899. Math. Annalen **53** (1900) und **54** (1901).

[7]) *W. Blaschke*, Göttinger Nachrichten 1912, S. 607—610; *H. Weyl*, Berliner Sitzungsberichte 1917, S. 250—266. *W. Blaschke*, Die Starrheit der Eiflächen. Math. Zeitschr. **9** (1921) S. 142—146.

setzt, das skalare Produkt verschwinden:

$$d\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{z} = 0 .$$

Man kann deshalb den Vektor $d\mathfrak{z}$ mittels eines Hilfsvektors $\mathfrak{y}(u, v; t)$ darstellen in der Form

(15) $$d\mathfrak{z} = \mathfrak{y} \times d\mathfrak{x} .$$

Da $d\mathfrak{x}$ ein Büschel von Vektoren durchläuft (bei veränderlichem $du : dv$), so ist $\mathfrak{y}$ durch diese Formel eindeutig bestimmt.

Nach (15) ist bei festem t

$$\mathfrak{y} \times d\mathfrak{x} = (\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}_u)\, du + (\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}_v)\, dv$$

ein vollständiges Differential und somit

(16) $$\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v = \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u .$$

Die Vektoren $\mathfrak{y}_u$, $\mathfrak{y}_v$ müssen sich deshalb aus den nach Voraussetzung linear unabhängigen $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ darstellen lassen

(17) $$\mathfrak{y}_u = \alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v ; \qquad \mathfrak{y}_v = \gamma \mathfrak{x}_u + \delta \mathfrak{x}_v .$$

Aus (16) folgt

(18) $$\alpha + \delta = 0 .$$

Ferner ergibt sich durch Ableitung aus (16)

$$(\mathfrak{x}_{uu} \times \mathfrak{y}_v) - (\mathfrak{x}_{uv} \times \mathfrak{y}_u) = (\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_{uu}) - (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_{uv}) ,$$
$$(\mathfrak{x}_{uv} \times \mathfrak{y}_v) - (\mathfrak{x}_{vv} \times \mathfrak{y}_u) = (\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_{uv}) - (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_{vv}) .$$

Multipliziert man die erste Gleichung skalar mit $\mathfrak{x}_v$, die zweite mit $\mathfrak{x}_u$ und subtrahiert, so folgt

(19) $$(\mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uu} \mathfrak{y}_v) - (\mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{y}_u) = (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uv} \mathfrak{y}_v) - (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{vv} \mathfrak{y}_u)$$

oder, wenn man nach (19) in § 33 die Koeffizienten der zweiten Grundform einführt,

(20) $$\gamma L - 2\alpha M - \beta N = 0 .$$

Ist $(\mathfrak{x})$ elliptisch gekrümmt

(21) $$LN - M^2 > 0 ,$$

so sind auf $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{y})$ entsprechende Umlaufsinne entsprechender Stellen entgegengesetzt, d. h. es ist

(22) $$\alpha\delta - \beta\gamma = -\alpha^2 - \beta\gamma \leqq 0 .$$

In der Tat! Die Punkte (die ξ_k bedeuten homogene Punktkoordinaten in der Ebene)

$$\xi_1 = +L, \quad \xi_2 = +M, \quad \xi_3 = +N;$$
$$\xi_1' = -\beta, \quad \xi_2' = +\alpha, \quad \xi_3' = +\gamma$$

sind wegen (20) oder

(23) $$\xi_1 \xi_3' - 2\xi_2 \xi_2' + \xi_3 \xi_1' = 0$$

zum Kegelschnitt $\xi_1 \xi_3 - \xi_2^2 = 0$ konjugiert. Der erste ist nach (21) innerer, also der zweite äußerer Punkt dieses Kegelschnitts. Somit ist in der Regel

$$\xi_1' \xi_3' - \xi_2'^2 = -\alpha^2 - \beta\gamma < 0$$

und nur dann

$$-\alpha^2 - \beta\gamma = 0,$$

wenn die homogenen Punktkoordinaten ξ' versagen, wenn also die Beziehung gilt

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0. \tag{24}$$

Haben wir zwei einfach zusammenhängende Flächenstücke $\mathfrak{x}(u, v)$, $\mathfrak{y}(u, v)$, so bleibt das Doppelintegral

$$\int\int (\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_u\, \mathfrak{y}_v)\, du\, dv$$

ungeändert, wenn man für u, v neue gleichsinnige Veränderliche einführt. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_u\, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}_v\, \mathfrak{y}_u\, \mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_{u\,v}\, \mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_u\, \mathfrak{y}_v),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_v\, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}_u\, \mathfrak{y}_v\, \mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_{u\,v}\, \mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_v\, \mathfrak{y}_u).$$

Daraus folgt durch Abziehen

$$2(\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_u\, \mathfrak{y}_v) = (\mathfrak{x}_u\, \mathfrak{y}_v\, \mathfrak{y}) - (\mathfrak{x}_v\, \mathfrak{y}_u\, \mathfrak{y}) + \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_u\, \mathfrak{y}) - \frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_v\, \mathfrak{y}). \tag{25}$$

Wegen (16) heben sich in unserm Sonderfall die ersten zwei Glieder rechts weg. Für unser Doppelintegral ergibt sich also, wenn es über einfach zusammenhängende Flächenstücke erstreckt wird, ein im geeigneten Sinn genommenes Randintegral

$$2\int\int (\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_u\, \mathfrak{y}_v)\, du\, dv = \oint (\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, \mathfrak{y}). \tag{26}$$

Die Fläche $(\mathfrak{x})$ soll nun eine Eifläche sein. Wir können daher $(\mathfrak{x})$ durch eine doppeltpunktfreie, geschlossene Linie in zwei einfach zusammenhängende Teilflächen zerschneiden, auf jede die Formel (26) anwenden und addieren. So ergibt sich

$$\int\int (\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_u\, \mathfrak{y}_v)\, du\, dv = 0. \tag{27}$$

Andrerseits ist für jede der beiden Teilflächen

$$\int\int (\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}_u\, \mathfrak{y}_v)\, du\, dv = \int\int (\mathfrak{x}\, \mathfrak{x}_u\, \mathfrak{x}_v)(\alpha\delta - \beta\gamma)\, du\, dv. \tag{28}$$

Wählen wir den Ursprung im Innern von $(\mathfrak{x})$ und die Parameter u, v in beiden Teilflächen so, daß $(\mathfrak{x}\, \mathfrak{x}_u\, \mathfrak{x}_v) > 0$ wird, so ist in (28) rechts wegen (22) der Integrand $\leqq 0$ und das Integral, welches nach (27) verschwinden muß, kann nach (24) nur so zu Null werden, daß $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ einzeln verschwinden. Dann ist aber nach (17) $\mathfrak{y}_u = \mathfrak{y}_v = 0$, also $\mathfrak{y}(t)$ nur von t abhängig. Die Integration von (15) liefert

$$\mathfrak{z} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} = \mathfrak{z}_0(t) + \mathfrak{y}(t) \times \mathfrak{x}(u, v; t). \tag{29}$$

Das bedeutet, daß die Eifläche als starrer Körper bewegt wird. Denn, haben wir zwei Punkte

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}(u_1, v_1; t), \quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}(u_2, v_2; t),$$

so bleibt ihre räumliche Entfernung erhalten:

$$(30) \quad \delta(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)^2 = 2(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1, \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) = 2(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) = 0.$$

Damit ist der Nachweis beendet.

H. Weyl hat allgemeiner bewiesen, daß zwei längentreu aufeinander abgebildete Eiflächen entweder kongruent oder symmetrisch sein müssen. Ja noch mehr! Er hat gezeigt: *Zu einem vorgegebenen Bogenelement positiver Krümmung gibt es stets eine und im wesentlichen nur eine Eifläche.* Indessen sind *H. Weyl*s Beweise sehr verwickelt[8]).

§ 78. *Minkowski*s Stützfunktion.

Für das Folgende ist es zweckmäßig, einige auch sonst verwendbare Formeln der Flächentheorie herzuleiten, die auf *H. Minkowski* zurückgehen. Denken wir uns eine krumme Fläche dadurch dargestellt, daß die Entfernung p der Tangentenebene vom Ursprung in ihrer Abhängigkeit vom Einheitsvektor der Flächennormalen ξ vorgeschrieben ist:

$$p = p(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Wir setzen

$$r\xi_i = \alpha_i, \quad r > 0,$$

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \cdot p\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}, \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}, \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}\right) = P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

und haben, wenn die Vorzeichen positiv genommen werden, in P eine im ersten Grad „positiv homogene" Funktion der α vor uns:

$$P(\mu\alpha_1, \mu\alpha_2, \mu\alpha_3) = \mu P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \ \mu > 0.$$

Dieses P ist *Minkowskis „Stützfunktion"*.

Wegen der Homogeneität von P ist nach *Euler*

$$(31) \qquad \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = P,$$

wo

$$P_i = \frac{\partial P}{\partial \alpha_i}$$

bedeutet. Die Gleichung der Tangentenebene an unsre Fläche ist

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = P.$$

[8]) *H. Weyl*, Über die Bestimmung einer geschlossenen, konvexen Fläche durch ihr Linienelement. Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, **61** (1915), S. 40 bis 72.

Wir können uns darin für den Augenblick α_3 festgehalten denken und finden dann durch partielle Ableitung, z. B. nach α_1 bei festen x für den Berührungspunkt mit der umhüllten Fläche

$$x_1 = P_1 .$$

Aus Symmetriegründen müssen daher die Beziehungen gelten:

$$x_i = P_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) . \tag{32}$$

Dabei ist es unwesentlich, daß die α homogene Veränderliche, also nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt sind. Denn die P_i sind als Ableitungen einer im ersten Grad homogenen Funktion im nullten Grad homogen:

$$P_i(\mu\alpha_1, \mu\alpha_2, \mu\alpha_3) = P_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \mu > 0 .$$

Wir wollen nun die Halbmesser R_1, R_2 der Hauptkrümmungen unsrer Fläche aus der Stützfunktion ermitteln. Nach *Olinde Rodrigues* (§ 37) gilt für die Fortschreitung auf einer Krümmungslinie

$$dx_i + R\, d\xi_i = 0$$

oder nach (32)

$$\sum_k P_{ik}\, d\xi_k + R\, d\xi_i = 0 . \tag{33}$$

Darin ist, ausführlich geschrieben,

$$P_{ik} = \frac{\partial^2 P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial\alpha_i \partial\alpha_k} .$$

Da die $d\xi_i$ nicht alle Null sind, muß die Determinante des Gleichungssystems (33) verschwinden:

$$\begin{vmatrix} P_{11}+R & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22}+R & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33}+R \end{vmatrix} = 0 . \tag{34}$$

Diese scheinbar kubische Gleichung für R läßt sich leicht auf eine quadratische zurückführen. Aus (31) folgt nämlich durch Ableitung nach α_i:

$$\sum P_{ik}\alpha_k = 0 .$$

Somit verschwindet die Determinante der P_{ik}. Die Gleichung (34) hat also, wenn man R weghebt, die Gestalt

$$R^2 + (P_{11} + P_{22} + P_{33})R + (*) = 0 .$$

Daraus folgt das gesuchte Ergebnis

$$-(R_1 + R_2) = P_{11} + P_{22} + P_{33} . \tag{35}$$

wobei rechts die normierten Veränderlichen ξ_i einzusetzen sind[9]).

[9]) Vgl. dazu die Angaben von Aufgabe 13 des § 51.

§ 79. Ein Satz von *Christoffel* über geschlossene Flächen.

Als Anwendung der Formel (35) für $R_1 + R_2$ soll jetzt folgender von *E. B. Christoffel* 1865 gefundener Satz[10]) bewiesen werden:

Betrachten wir eine geschlossene Fläche $\mathfrak{F}$, die sich durch (passend gerichtete) parallele Normalen eineindeutig auf die Einheitskugel abbilden läßt! Durch die Angabe von $R_1 + R_2$ als stetige und etwa analytische Funktion auf dem sphärischen Bilde ist die Fläche $\mathfrak{F}$ bis auf Parallelverschiebungen eindeutig bestimmt.

Zum Beweise wollen wir die Funktion $(R_1 + R_2)$ auf der Einheitskugel nach sogenannten „Kugelfunktionen" entwickeln. Das heißt, wir setzen

$$R_1 + R_2 = \sum_0^\infty U_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \tag{36}$$

wobei U_k eine Form vom Grad k in den α ist, die der Differentialgleichung von *Laplace* genügt:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_3^2}\right) U_k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0\,. \tag{37}$$

Die Möglichkeit und Eindeutigkeit dieser Entwicklung setzen wir als bekannt voraus[11]). Entsprechend soll die Stützfunktion P von $\mathfrak{F}$ nach Kugelfunktionen entwickelt werden:

$$P = \sum_0^\infty V_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Wir wollen nun P zu einer in den α_i homogenen Funktion ersten Grades machen. Dazu brauchen wir nur zu setzen

$$P = \sum_0^\infty \frac{V_k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{r^{k-1}}, \tag{38}$$

$$r = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

Auf die normierte Funktion können wir die Formel (35) anwenden. Es ist

$$\left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2}\right) \frac{V_k}{r^{k-1}} = \frac{1}{r^{k-1}} \sum_i \frac{\partial^2 V_k}{\partial \alpha_i^2} + 2 \sum_i \frac{\partial V_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{1}{r^{k-1}} + V_k \sum_i \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2} \frac{1}{r^{k-1}}. \tag{39}$$

Das erste Glied rechts fällt weg, da V_k ebenso wie U_k der Differentialgleichung von *Laplace* (37) genügt. Andrerseits ist

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{1}{r^{k-1}} = -(k-1) \frac{\alpha_i}{r^{k+1}} \tag{40}$$

---

[10]) *E. B. Christoffel*, Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Fläche durch lokale Messungen auf derselben. Werke I. Leipzig und Berlin 1910. S. 162—177. Vgl. auch *A. Hurwitz*, Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier, École Normale (3) **19** (1902), S. 357—408.

[11]) Vgl. etwa *E. Heine*, Handbuch der Kugelfunktionen. 2. Aufl., Leipzig 1881.

und somit wegen der Homogenität von V_k

$$\sum_i' \frac{\partial V_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \frac{1}{r^{k-1}} = -\frac{k(k-1)}{r^{k+1}} V_k.$$

Ferner hat man durch nochmalige Ableitung von (40)

$$\sum_i' \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2} \frac{1}{r^{k-1}} = -3(k-1)\frac{1}{r^{k+1}} + \sum_i'(k^2-1)\frac{\alpha_i^2}{r^{k+3}} = \frac{k^2-3k+2}{r^{k+1}}.$$

Somit nimmt die Formel (39) die Gestalt an

$$\left(\sum_i' \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2}\right) \frac{V_k}{r^{k-1}} = -\frac{(k^2+k-2)}{r^{k+1}} V_k = -\frac{(k-1)(k+2)}{r^{k+1}} V_k.$$

Aus (38) ergibt sich also, wenn gliedweise Ableitung zulässig ist, nach (35) für $r = 1$

$$R_1 + R_2 = \sum_0^\infty (k-1)(k+2) V_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \tag{41}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Reihenentwicklung muß die letzte Reihe mit der unter (36) Glied für Glied übereinstimmen. Es ist also

$$V_k = \frac{1}{(k-1)(k+2)} U_k; \quad k = 0, 2, 3, 4 \ldots \tag{42}$$

In der Entwicklung von (42) verschwindet der Koeffizient V_1. Also ist $V_1 = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3$ beliebig, was damit zusammenhängt, daß der Ursprung willkürlich wählbar ist. In der Reihenentwicklung von $R_1 + R_2$ muß dann das lineare Glied U_1 fehlen, was wegen der „Orthogonalitätseigenschaft" der Kugelfunktionen[12]) bedeutet, daß

$$\int (R_1 + R_2) \xi_i \, d\omega = 0 \tag{43}$$

sein muß. Darin bedeutet $d\omega$ das Flächenelement der Kugel. Die Integration ist über die ganze Kugelfläche zu erstrecken. Im übrigen darf die Funktion $R_1 + R_2$ auf der Kugel beliebig vorgeschrieben werden. Die dazugehörige Stützfunktion P ist aus (42) (bis auf beliebiges V_1) eindeutig bestimmt.

Es soll noch schnell gezeigt werden, daß die Integralgleichungen (43) tatsächlich für jede geschlossene Fläche gelten. Es seien $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ die Bogenelemente des sphärischen Bildes, die den Bogenelementen ds_1, ds_2 der Krümmungslinien entsprechen. Dann gilt für das Oberflächenelement

$$do = ds_1 \cdot ds_2 = (R_1 \, d\sigma_1) \cdot (R_2 \, d\sigma_2)$$

und für das Flächenelement der Parallelfläche im Abstand h:

$$do_h = (R_1 + h) d\sigma_1 \cdot (R_2 + h) d\sigma_2 = do + h(R_1 + R_2) d\omega + h^2 d\omega. \tag{44}$$

Nun ist offenbar identisch in h

$$\int \xi_i \, do_h = 0,$$

[12]) $\int V_i V_k \, d\omega = 0$ für $i \neq k$.

d. h. die Projektion unsrer geschlossenen Fläche auf eine Ebene hat den Gesamtflächeninhalt Null. Setzt man für do_h aus (44) den Wert ein, so ergibt sich die Richtigkeit unsrer Behauptung:

$$\int (R_1 + R_2)\,\xi_i\, d\omega = 0\,.$$

Von Konvergenzschwierigkeiten ist hier abgesehen worden. Sie werden von vornherein vermieden, wenn wir die betrachteten Funktionen als regulär und analytisch auf der Fläche voraussetzen.

§ 80. Ein Satz von *Hilbert* über Flächen festen negativen Krümmungsmaßes.

Ähnlich, wie wir in § 75 Formeln für Flächen mit $K = 1$ abgeleitet haben, wollen wir jetzt Formeln für $K = -1$ berechnen. Wir setzen, indem wir wieder die Krümmungslinien als Parameterlinien wählen,

$$R_1 = \operatorname{tg}\sigma\,, \quad R_2 = -\operatorname{ctg}\sigma\,.$$

Dann zeigen wir genau so, wie in § 75 (8), daß man setzen kann:

$$\sqrt{E} = \sin\sigma\,, \quad \sqrt{G} = \cos\sigma$$

und daraus nach § 75 (2)

$$L = +\sin\sigma\cos\sigma\,, \quad N = -\sin\sigma\cos\sigma\,.$$

Die Differentialgleichung der Asymptotenlinien hat somit die Form

$$(du + dv)(du - dv) = 0\,. \tag{45}$$

Führen wir also durch die Formeln

$$u = p - q\,, \quad v = p + q$$

neue Parameter p, q ein, so sind die neuen Parameterlinien $p, q =$ konst. oder $u \pm v =$ konst. die Asymptotenlinien der Fläche. Das Bogenelement hat die Form

$$ds^2 = du^2 \sin^2\sigma + dv^2 \cos^2\sigma = dp^2 + 2\,dp\,dq\cos 2\sigma + dq^2. \tag{46}$$

Hieraus ergibt sich nebenbei, daß bei einem Viereck aus Asymptotenlinien die Gegenseiten gleich lang sind. Solche Kurvennetze (mit $E = G = 1$) auf beliebigen Flächen hat der russische Mathematiker *P. L. Tschebyscheff* 1878 untersucht[13]). Spannt man ein Fischnetz über eine krumme Fläche, so bildet es eine solche Figur.

Wendet man auf das Bogenelement in p, q die Formel von *Gauß* (§ 49) an, so findet man für den Winkel $2\sigma = \omega$ der Asymptotenlinien die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial p\,\partial q} = \sin\omega\,. \tag{47}$$

---

[13]) *P. L. Tschebyscheff*, Sur la coupe des vêtements, Oeuvres II, S. 708. *A. Voß*, Über ein neues Prinzip der Abbildung krummer Oberflächen. Mathem. Annalen, **19** (1882), S. 1—26. *L. Bianchi*, Lezioni di geometria differenziale. 3. Aufl. 1920. I., S. 153—162.

Hieraus kann man z. B. für die Oberfläche

$$F = \int\int \sin\omega \, dp \, dq$$

einfache Folgerungen herleiten. Für ein Viereck aus Asymptotenlinien $p_1 < p < p_2$, $q_1 < q < q_2$ erhält man

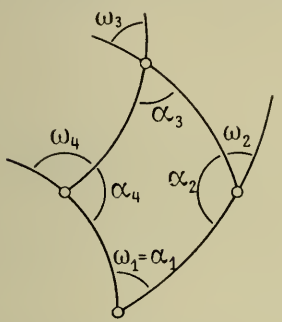
$$F = \omega(p_1, q_1) - \omega(p_1, q_2) + \omega(p_2, q_2) - \omega(p_2, q_1)$$

oder, wenn man die Innenwinkel mit α_k bezeichet (Fig. 24),

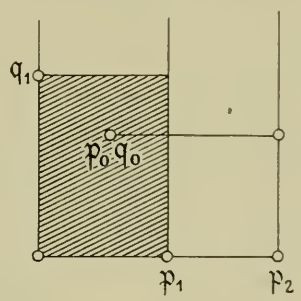
$$F = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi; \quad 0 < \alpha_k < \pi, \tag{48}$$

eine Formel, die 1878 von *J. N. Hazzidakis* angegeben worden ist[14]).

Die bekannten Flächen mit $K = -1$, wie die von *Minding* gefundenen Schraubenflächen sind alle mit singulären Linien behaftet. *D. Hilbert* hat deshalb die Frage aufgeworfen, ob es auch unberandete und im Endlichen überall reguläre, analytische Flächen mit $K = -1$ gibt. Er hat gezeigt, daß dies nicht der Fall ist[3]).



Figur 24.



Figur 25.

Gäbe es eine solche Fläche, so wären ihre Asymptotenlinien im Endlichen durchweg reguläre, analytische Kurven, von denen durch jeden Flächenpunkt zwei mit verschiedenen Tangenten hindurchliefen, so daß wir den Winkel ω auf die Werte $0 < \omega < \pi$ beschränken könnten. Deuten wir die Parameter p, q gleichzeitig als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene, so entspricht jedem Punkt der Ebene sicher ein einziger Flächenpunkt. Die Fläche ist ein eindeutiges Abbild der Ebene. In umgekehrter Richtung braucht die Abbildung von vornherein nicht eindeutig zu sein, da es geschlossene Asymptotenlinien geben könnte. Da nach (47) ω längs keiner Asymptotenlinie fest bleibt, könnten wir den Ursprung der p, q auf der Fläche und die positive p-Richtung so wählen, daß $\omega(p, 0)$ für $0 \leqq p \leqq p_2$ wächst. Dann hätten wir

$$\omega(p, q) - \omega(0, q) = \omega(p, 0) - \omega(0, 0) + \int_0^p \int_0^q \sin\omega \cdot dp \, dq. \tag{49}$$

[14]) *J. N. Hazzidakis*, Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstantem Krümmungsmaß, Crelle 88 (1880), S. 68—73.

Hieraus folgt: ω wächst auf jeder Strecke $q = \text{konst.} > 0$, $0 < p < p_2$ mindestens ebenso stark wie auf der Strecke $q = 0$, $0 < p < p_2$ (da das Doppelintegral positiv ist).

Betrachten wir dann (Fig. 25) das Viereck $0 < p < p_1 < p_2$, $0 < q < q_1$, und setzen wir $\omega(p_2, 0) - \omega(p_1, 0) = \varepsilon$. Dann gibt es in diesem Viereck für genügend großes q_1 sicher eine Stelle, an der

$$\omega = \pi - \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Bliebe nämlich stets $\omega < \pi - (\varepsilon : 2)$, so würde in (49) das Integral für genügend großes q beliebig groß werden, da etwa für $p_1 : 2 < p < p_1$ stets

$$\omega\left(\frac{p_1}{2}, 0\right) - \omega(0, 0) < \omega(p, q) < \pi - \frac{\varepsilon}{2} \tag{50}$$

ist. Also bliebe $\sin\omega$ über einer positiven Schranke. Dann könnte man aber $\omega(p, q)$ beliebig vergrößern entgegen der Annahme $\omega < \pi$. Es sei nun p_0, q_0 eine Stelle $(0 < p_0 < p_1)$, wo

$$\omega(p_0, q_0) = \pi - \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Nach (49) wäre

$$\omega(p_2, q_0) - \omega(p_0, q_0) = \omega(p_2, 0) - \omega(p_0, 0) + \int_{p_0}^{p_2}\int_{0}^{q_0} \sin\omega \cdot dp \cdot dq \tag{51}$$

$$> \omega(p_2, 0) - \omega(p_1, 0) = \varepsilon$$

und daher

$$\omega(p_2, q_0) > \pi + \frac{}{2}.$$

Somit überschritte der Winkel ω den Wert π auf der Strecke $p_0 < p < p_2$, $q = q_0$ entgegen der Voraussetzung. Dieser einfache Unmöglichkeitsbeweis stammt von *Erik Holmgren* 1902[15]).

Schließlich sei noch kurz auf den Gedanken des ursprünglichen von *Hilbert* stammenden Beweises hingewiesen. Aus der Tatsache, daß die Asymptotenlinien ein *Tschebyscheff*netz bilden, schließt *Hilbert*, daß es keine geschlossenen Asymptotenlinien geben kann. Deshalb wäre jede Fläche der gewünschten Art eineindeutiges Abbild der p, q-Ebene. Aus der Formel (48) von *Hazzidakis* für die Fläche eines Vierecks aus Asymptotenlinien könnte man entnehmen, daß jede solche Fläche $< 2\pi$ sein muß, daß daher die Gesamtfläche $\leqq 2\pi$ sein würde. Hingegen kann man aus der Abbildung auf die Halbebene von *Poincaré* (§ 61) leicht sehen, daß die Gesamtfläche

$$\int_{y>0}\int \frac{dx\,dy}{y^2} = \infty$$

unendlich ist. Somit führt die Annahme des Vorhandenseins einer singularitätenfreien und unberandeten Fläche mit $K = -1$ auch auf diesem Wege zu einem Widerspruch.

---

[15]) *Erik Holmgren*, Paris, Comptes Rendus **134** (1902), S. 740—743.

§ 81. Bemerkungen über geschlossene geodätische Linien auf einer Eifläche nach *H. Poincaré*.

Ausgehend von astronomischen Fragestellungen über das „Dreikörperproblem" hat *Poincaré* die geschlossenen geodätischen Linien auf einer Eifläche untersucht[16]). Man kann sich leicht veranschaulichen, daß es auf jeder Eifläche mindestens eine solche geschlossene geodätische Linie geben muß.

Wendet man nämlich zunächst auf eine derartige Linie die Integralformel von *Bonnet* (§ 63 (97)) an, so ergibt sich

$$\int K\, do = 2\pi,$$

d. h. das von unsrer Kurve umschlossene Flächenstück hat die Gesamtkrümmung 2π. Bilden wir unsere Eiflächen etwa durch parallele äußere Normale auf die Einheitskugel ab, so können wir feststellen: *Das sphärische Abbild einer geschlossenen geodätischen Linie hälftet die Oberfläche der Einheitskugel.*

Deshalb liegt es nahe, umgekehrt von allen auf unsrer Eifläche liegenden geschlossenen Linien auszugehen, deren sphärisches Abbild die Kugel hälftet, und unter diesen die kürzeste aufzusuchen. Es wird behauptet, daß diese kürzeste eine geodätische Linie ist. Gehen wir von einer geschlossenen Kurve auf unsrer Eifläche zu einer benachbarten über dadurch, daß wir senkrecht zur Kurve die Strecke δn abtragen, so ändert sich der Umfang L nach der Formel § 54 (18)

$$\delta L = -\oint \frac{\delta n}{\varrho_g}\, ds.$$

Die Änderung der Gesamtkrümmung des umschlossenen Oberflächenteils der Eifläche ist (vgl. § 59 (49))

$$\delta \Omega = -\oint K \cdot \delta n \cdot ds.$$

Soll nun die Ausgangskurve bei gegebenem $\Omega = 2\pi$ den Kleinstwert des Umfangs ergeben, so muß aus $\delta \Omega = 0$ folgen $\delta L = 0$. Daraus schließt man wie in § 25

$$\frac{1}{\varrho_g} = \lambda K, \qquad \lambda = \text{konst.} \tag{52}$$

Nun ist nach *Bonnet*

$$\oint \frac{ds}{\varrho_g} + \Omega = 2\pi,$$

also

$$\oint \frac{ds}{\varrho_g} = \lambda \oint K\, ds = 0. \tag{53}$$

Da aber auf der Eifläche das Krümmungsmaß $K > 0$ ist, folgt $\lambda = 0$ und $1 : \varrho_g = 0$. D. h. unsre Kurve ist in der Tat geodätisch.

---

[16]) *H. Poincaré*, Sur les lignes géodèsiques des surfaces convexes, Americ. Transactions **6** (1905), S. 237—274.

Das Vorhandensein einer Lösung des Variationsproblems $\Omega = 2\pi$, $L =$ Minimum ist aber recht einleuchtend und kann auch nach Methoden bewiesen werden, die im Anschluß an *Hilbert*s Untersuchungen über das sogenannte Prinzip von *Dirichlet* ausgebildet worden sind[17]). *Poincaré* hat durch ein physikalisches Gedankenexperiment deutlich zu machen gesucht, daß die lösende geschlossene geodätische Linie keine mehrfachen Punkte besitzt.

Nachdem auf diese Weise das Vorhandensein *einer* geschlossenen geodätischen Linie auf jeder Eifläche veranschaulicht ist, soll nach einer Mitteilung von *G. Herglotz* gezeigt werden, daß es ihrer mindestens *drei* geben muß.

Zu diesem Zweck ordnen wir zunächst jeder geschlossenen Kurve einen Vektor $\mathfrak{v}$ zu nach der Formel

$$\mathfrak{v} = \oint \mathfrak{x} \times d\mathfrak{x}, \tag{54}$$

wo das Integral rings um die Kurve zu erstrecken ist[18]). Wir nehmen nun zu unserem Variationsproblem (auf der gegebenen Eifläche eine geschlossene Kurve mit $\Omega = 2\pi$ und $L =$ Min. zu finden) noch die Bedingung hinzu, daß der Vektor $\mathfrak{v}$ der Kurve zu einer Geraden $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{o}$ parallel sein soll. Auf $\mathfrak{G}$ tragen wir von $\mathfrak{o}$ aus nach beiden Seiten hin den Kleinstwert von L ab. Dreht man $\mathfrak{G}$ um $\mathfrak{o}$, so beschreiben die Endpunkte dieser Strecken, wie man zeigen kann, eine stetige Fläche $\mathfrak{F}$, die offenbar $\mathfrak{o}$ zum Mittelpunkt hat und nicht durch $\mathfrak{o}$ hindurchgeht[19]). Dem Punktepaar von $\mathfrak{F}$, das am nächsten von $\mathfrak{o}$ liegt, entspricht auf der Eifläche die früher betrachtete geschlossene geodätische Linie. Da es bei allen diesen Fragen aber nur auf erste Ableitungen ankommt, so leuchtet ein: Jedem zu $\mathfrak{o}$ symmetrischen Punktepaar auf $\mathfrak{F}$, dessen Entfernung von $\mathfrak{o}$ einen stationären Wert hat, entspricht auf der Fläche eine geschlossene geodätische Linie. Wir haben also nur mehr festzustellen, wieviele zu $\mathfrak{o}$ symmetrische Punktepaare extremer Entfernung von $\mathfrak{o}$ auf unserer Fläche $\mathfrak{F}$ vorhanden sind, die $\mathfrak{o}$ zum Mittelpunkt haben. Zunächst gibt es das Paar weitester Entfernung (es sei $\mathfrak{p}$ ein Punkt dieses Paares) und das Paar geringster Entfernung (es sei $\mathfrak{q}$ ein Punkt dieses zweiten Paares). Verbindet man auf $\mathfrak{F}$ die Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ derart, daß man sich auf diesem Wege von $\mathfrak{o}$ möglichst fern hält, so entspricht dem $\mathfrak{o}$ zunächst gelegenen Punkt des Weges ein Sattelwert der Entfernung. Somit gibt es mindestens drei Punktepaare „extremer" Entfernung, oder

---

[17]) Man vgl. etwa *O. Bolza*, Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig u. Berlin 1909, Kap. IX, S. 419—443. Vgl. im folgenden § 85.

[18]) Man kann übrigens leicht sehen, daß $\mathfrak{v}$ von der Wahl des Koordinatenursprungs nicht abhängt.

[19]) Es gibt stets geschlossene doppelpunktfreie Kurven auf unserer Eifläche, für die der Vektor $\mathfrak{v} = 0$ ist. Die Kugel um $\mathfrak{o}$, die den Umfang einer solchen Kurve zum Halbmesser hat, liegt innerhalb von $\mathfrak{F}$.

besser „stationärer" Entfernung, von o auf $\mathfrak{F}$, Punktepaare, in denen die Tangentenebenen senkrecht auf der Verbindungsstrecke des Paares stehen.

Damit wäre, wenn man diesen Beweisansatz ausgestaltete[20]), gezeigt: *Jede Eifläche besitzt mindestens drei geschlossene geodätische Linien.*

Weitgehende mechanische Untersuchungen, die mit der Frage der geschlossenen geodätischen Linien zusammenhängen, sind kürzlich von dem Amerikaner *G. D. Birkhoff* angestellt worden[21]).

§ 82. *Erdmanns* Eckbedingung.

O. Bonnet hat 1855 gezeigt, daß zwischen der Krümmung und der Gesamterstreckung einer Eifläche der Zusammenhang besteht: *Ist das Krümmungsmaß K auf einer Eifläche durchweg $\geqq 1 : A^2$, so ist die Entfernung irgend zweier Flächenpunkte stets $< \pi A$.* Wir gehen darauf aus, den besonders geistvollen Beweis dieses Satzes, dessen Gedanke ebenfalls von *Bonnet* stammt, vorzuführen. Wir beginnen damit, eine auch an und für sich anziehende Hilfsbetrachtung aus der Variationsrechnung einzuschalten.

Nehmen wir eine Variationsaufgabe einfachster Art. Es sollen zwei Punkte x_1, y_1; x_2, y_2 durch eine Kurve $y = y(x)$ so verbunden werden, daß das Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx, \tag{55}$$

längs dieser Kurve erstreckt, einen extremen Wert bekommt. Dabei wollen wir untersuchen, ob es möglich ist, daß die lösende Kurve $y = y(x)$ an einer Stelle x_3, y_3 einen Knick haben kann, so daß in leicht verständlicher Bezeichnung die Beziehungen bestehen

$$\begin{aligned} y(x_3 - 0) &= y(x_3 + 0), \\ y'(x_3 - 0) &= {}^*y', \\ y'(x_3 + 0) &= y'^*. \end{aligned} \tag{56}$$

Gehen wir zu einer Nachbarkurve über

$$y(x) + \varepsilon\eta(x),$$

mit $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, so wird, unter der vereinfachenden Annahme, daß der Knickpunkt auf der Geraden $x = x_3$ fortrückt,

$$J(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_3} f(x, y + \varepsilon\eta,\ y' + \varepsilon\eta')\, dx + \int_{x_3}^{x_2} f(x, y + \varepsilon\eta,\ y' + \varepsilon\eta')\, dx.$$

---

[20]) Es wäre dabei z. B. die Differenzierbarkeit der Fläche $\mathfrak{F}$ nachzuweisen.

[21]) *G. D. Birkhoff*, Dynamical systems with two degrees of freedom, American Transactions **18** (1917), S. 199—300.

Daraus folgt durch Ableitung

$$J'(0) = \int_{x_1}^{x_3} (f_y \eta + f_{y'} \eta') \, dx + \int_{x_3}^{x_2} (f_y \eta + f_{y'} \eta') \, dx$$

und durch Integration nach Teilen

$$(57) \quad J'(0) = \int_{x_1}^{x_3} \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right) \eta \, dx + \int_{x_3}^{x_2} \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}\right) \eta \, dx + \eta_3 ({}^*f_{y'} - f_{y'}^*).$$

Darin bedeutet η_3 den Wert, den η an der Stelle x_3 annimmt und

$${}^*f_{y'} = f_{y'}(x_3, y_3, {}^*y').$$

Wegen der Freiheit in der Wahl von η ist für $J'(0) = 0$ notwendig

$$(58) \qquad f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0,$$

daß also die beiden Teile der Kurve $y = y(x)$ der Differentialgleichung (58) von *Euler* und *Lagrange* genügen. Dazu kommt noch die folgende *Eckbedingung Erdmanns*

$$(59) \qquad {}^*f_{y'} = f_{y'}^*.$$

Obwohl später kein Gebrauch davon gemacht wird, sei in Kürze angegeben, wie man die zweite Eckbedingung *Erdmanns* aufstellt. Deuten wir das „Grundintegral" J unseres Variationsproblems als Zeit, die ein Punkt braucht, um die Bahn $y(x)$ zu durchlaufen, und tragen wir dann die zu einem festen Punkt x_3, y_3 und einer veränderlichen Richtung y' gehörigen Geschwindigkeitsvektoren

$$\xi = \frac{dx}{dJ} = \frac{1}{f}, \qquad \eta = \frac{dy}{dJ} = \frac{y'}{f}$$

vom Punkt x_3, y_3 aus ab, so erfüllen die Endpunkte dieser Vektoren die sogenannte *Eichkurve* oder *Indikatrix* des Punktes x_3, y_3. Für die Richtung der Eichkurve erhält man

$$(60) \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta_{y'}}{\xi_{y'}} = \frac{y' f_{y'} - f}{f_{y'}}$$

und für ihre Tangente die Gleichung

$$\eta - \frac{y'}{f} = \frac{y' f_{y'} - f}{f_{y'}} \left(\xi - \frac{1}{f}\right).$$

Daraus folgt für den Schnittpunkt mit $\xi = 0$

$$(61) \qquad \eta = \frac{1}{f_{y'}}.$$

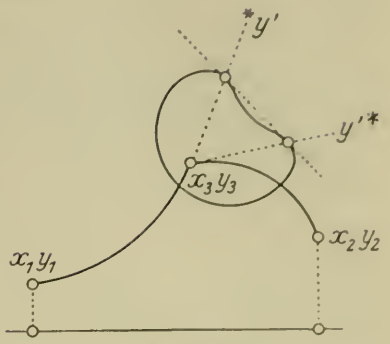
Die erste Bedingung (59) *Erdmanns* sagt also aus, daß die zu den Richtungen ${}^*y'$ und y'^* gehörigen Punkte der Eichkurve Tangenten besitzen, die die Gerade $\xi = 0$ im gleichen Punkt treffen. Da aber die Eckbedingung und die Eichkurve von der Achsenwahl unabhängig sind, müssen die Tangenten zusammenfallen (Fig. 26). Das gibt nach (59) und (60) die zweite *Erdmann*bedingung

$$(62) \qquad {}^*(f - y' f_{y'}) = (f - y' f_{y'})^*.$$

Die beiden Eckbedingungen

$$*f_{y'} = f_{y'}*,$$
$$*(f - y' f_{y'}) = (f - y' f_{y'})*$$

hat *G. Erdmann* 1875[22]) und etwa zur selben Zeit *K. Weierstraß* in seinen Vorlesungen über Variationsrechnung angegeben. Die geometrische Deutung der Eckbedingung stammt von *C. Carathéodory*[23]). Die beiden Richtungen $*y'$ und $y'*$ an der Eichkurve des Knickpunkts müssen zu den Berührungspunkten einer Doppeltangente hinzielen (Fig. 26).



Figur 26.

§ 83. Die Bedingung von *Jacobi*.

Wenn ein Großkreisbogen auf einer Kugel zu einem seiner Punkte auch den diametral gegenüberliegenden innerhalb des Bogens enthält so gibt dieser Großkreisbogen sicher nicht die kürzeste Verbindung seiner Endpunkte. Es handelt sich darum, diese einfache Bemerkung auf eine beliebige geodätische Linie einer beliebigen Fläche zu übertragen.

Wir nehmen auf dem zu untersuchenden geodätischen Bogen den Anfangspunkt $\mathfrak{a}$ zum Ursprung eines Systems geodätischer Polarkoordinaten (§ 57)

$$ds^2 = dr^2 + G d\varphi^2,$$

dann genügt, auf dem geodätischen Kreis $r =$ konst. gemessen, die Entfernung

$$\delta n = \sqrt{G}\, d\varphi$$

zur unendlich benachbarten geodätischen Linie durch $\mathfrak{a}$ der Differentialgleichung (§ 58 (41)) oder

$$\frac{d^2 \delta n}{dr^2} + K(r) \cdot \delta n = 0, \tag{63}$$

wo $K(r)$ das Krümmungsmaß der Fläche auf unsrer geodätischen Linie ist. Die Verallgemeinerung des zu $\mathfrak{a}$ diametral gegenüberliegenden Punktes wird der zu $\mathfrak{a}$ „*konjugierte*" *Punkt* $\mathfrak{a}'$ auf unsrem geodätischen Bogen genannt. Der ist so erklärt: man ermittelt die

[22]) *G. Erdmann*, Über unstetige Lösungen in der Variationsrechnung, Crelles Journal **82** (1877), S. 21—30.

[23]) *C. Carathéodory*, Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung, Dissertation Göttingen 1904, vgl. den Schluß S. 71.

bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Lösung δn der „*Jacobi*schen Differentialgleichung“ (63), die in $\mathfrak{a}$ verschwindet. Die auf $\mathfrak{a}$ folgende Nullstelle dieser Lösung δn gibt den konjugierten Punkt $\mathfrak{a}'$. Wir werden erwarten können: *Liegt* $\mathfrak{a}'$ *vor* $\mathfrak{b}$, *so ergibt unser geodätischer Bogen* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *keinen kürzesten Weg zwischen seinen Endpunkten.*

Zum Nachweis nehmen wir unsre geodätische Linie als Kurve $v = 0$ eines rechtwinkligen Netzes von Parameterlinien, während wir als Kurven $u =$ konst. die die Kurve $v = 0$ senkrecht schneidenden geodätischen Linien wählen. (Vgl. § 56). Dann bekommen wir das *Gauß*ische Bogenelement

$$ds^2 = A^2 du^2 + dv^2$$

mit

$$A(u, 0) = 1, \qquad A_v(u, 0) = 0.$$

Für die Bogenlänge der variierten Kurve

$$v = v(u) = \varepsilon \bar{v}(u)$$

erhalten wir, wenn wir nach Potenzen von ε entwickeln,

$$\begin{aligned} S(\varepsilon) &= \int \sqrt{A^2 + v'^2}\, du \\ &= \int \sqrt{1 + v^2 A_{vv}(u, 0) + v'^2 + \ldots}\, du \\ &= \int du + \tfrac{1}{2} \int \{v^2 A_{vv}(u, 0) + v'^2\}\, du + \ldots . \end{aligned}$$

Setzen wir, wie üblich

$$S(\varepsilon) = S(0) + \delta S + \tfrac{1}{2}\delta^2 S + \ldots,$$

so ergibt sich also neben dem selbstverständlichen $\delta S = 0$ für die „*zweite Variation*“ der Bogenlänge der Ausdruck

$$\delta^2 S = \int \{v^2 A_{vv} + v'^2\}\, du . \tag{64}$$

Nach § 58 (41) hat das Krümmungsmaß längs unserer geodätischen Linie $v = 0$ den Wert

$$K(u) = - A_{vv} . \tag{65}$$

Schreiben wir statt u noch s (Bogenlänge auf $v = 0$), so haben wir für die zweite Variation die endgültige Formel

$$\delta^2 S = \int \{v'^2 - K(s) \cdot v^2\}\, ds \text{ [24]}). \tag{66}$$

Soll die Ausgangskurve $v = 0$ einen kürzesten Weg zwischen ihren Endpunkten ergeben, so muß neben $S'(0) = 0$ noch die bekannte Bedingung $S''(0) \geqq 0$ oder

$$\delta^2 S \geqq 0$$

gelten für jedes v, das in den Randpunkten verschwindet. Falls das Krümmungsmaß K durchweg < 0 ist, ist diese Bedingung sicher erfüllt. Wir wollen im folgenden den entgegengesetzten Fall $K > 0$

[24]) Für $v =$ konst. bekommt man hieraus die Formel § 74, Aufg. 1.

behandeln. Um auch dann über das Vorzeichen von $\delta^2 S$ ins klare zu kommen, benutzen wir einen hübschen, von *G. A. Bliss* stammenden Gedanken[25]). Soll $\delta^2 S \geqq 0$ sein für alle v, so muß die Kurve $v = 0$ ein Minimum des Integrals

$$\delta^2 S = \int \{v'^2 - K(s)v^2\}\, ds$$

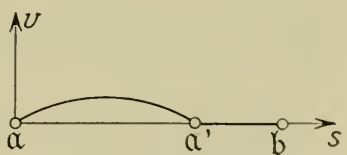
ergeben. Dieses Integral läßt sich als Sonderfall des Grundintegrals für das in § 82 behandelte Variationsproblem betrachten. Wir können also die dort entwickelte Theorie hier anwenden. Die Differentialgleichung von *Euler* und *Lagrange* (58) nimmt hier die Gestalt an

$$v'' + K \cdot v = 0\,, \tag{67}$$

fällt also mit der Differentialgleichung *Jacobis* (63) zusammen. Bestimmen wir von dieser Differentialgleichung die im Anfangspunkt $\mathfrak{a}$ unseres geodätischen Bogens verschwindende (aber nicht identisch verschwindende) Lösung. Ihre in der Richtung der wachsenden s nächste Nullstelle auf $v = 0$ falle nach $\mathfrak{a}'$ vor den Endpunkt $\mathfrak{b}$ des geodätischen Bogens. Dann konstruieren wir eine Funktion $\bar{v}(s)$, die zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ mit der eben aufgestellten zusammenfällt, und die von $\mathfrak{a}'$ an identisch Null ist. Wir haben dann

$$\int \{\bar{v}'^2 - K\bar{v}^2\}\, ds = -\int_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}'} \bar{v}\{\bar{v}'' + K\bar{v}\}\, ds = 0\,. \tag{68}$$

Da wir die Kurve in beliebiger Nähe von $v = 0$ (Fig. 27) wählen können (ε beliebig klein), so müßte, da für $\bar{v}(s)$ $\delta^2 S = 0$ erfüllt ist die Kurve ebenfalls ein Minimum von $\delta^2 S$ ergeben, wenn $\delta^2 S$ stets $\geqq 0$ sein soll. Also müßte $\bar{v}(s)$ eine geknickte Extremale des Variationsproblems ($\delta^2 S$ = Extrem) sein. Wenden wir auf den Knick an der Stelle $\mathfrak{a}'$ die Eckbedingungen *Erdmanns* an, so ergibt die erste



Figur 27.

$$^*v' = v'^* = 0\,.$$

Das ist aber unmöglich, da eine nicht triviale Lösung der *Jacobi*schen Gleichung $v'' + Kv = 0$ nicht gleichzeitig mit ihrer Ableitung verschwinden kann.

Damit ist die Notwendigkeit von *Jacobis* Bedingung erwiesen: *Soll ein geodätischer Kurvenbogen* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *die kürzeste Verbindung seiner Endpunkte ergeben, so darf der zu* $\mathfrak{a}$ *konjugierte Punkt* $\mathfrak{a}'$ *nicht in den Bogen hineinfallen* ($\mathfrak{a}' \geqq \mathfrak{b}$).

Natürlich ist hierin auch die Möglichkeit enthalten, daß es gar keinen zu $\mathfrak{a}$ konjugierten Punkt $\mathfrak{a}'$ gibt, wie bei Flächen mit $K < 0$.

[25]) *G. A. Bliss*, Jacobis condition . . ., American Transactions **17** (1916), S. 195—206.

Noch eine Bemerkung! Aus dem vorigen ergibt sich, daß man für $\mathfrak{a}' < \mathfrak{b}$ stets in beliebiger Nähe von $v = 0$ eine Verbindung zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit einem Knick herstellen kann, für die $\delta^2 S < 0$ wird. Dann kann man aber immer die Ecke so abrunden, daß sich der Integralwert $\delta^2 S$ so wenig ändert, daß auch für die abgerundete Kurve $v(s)$ noch $\delta^2 S < 0$ ausfällt.

Dieser von *Bliss* stammende Beweis für die Notwendigkeit von *Jacobi*s Bedingung läßt sich ganz entsprechend für allgemeinere Variationsprobleme durchführen. Die ersten Beweise für die Notwendigkeit der Bedingung *Jacobi*s gehen auf *K. Weierstraß*, *G. Erdmann* und *H. A. Schwarz* zurück. Sie benutzen ebenfalls die zweite Variation[26]). *Jacobi* hat seine Bedingung 1836 gefunden[27]).

Es gibt noch ein von *G. Darboux*[28]) stammendes, anschauliches Verfahren, um die Notwendigkeit der Bedingung *Jacobi*s einzusehen. Nur versagt dieses Verfahren in gewissen Ausnahmefällen. Die ersten zu einem Punkt $\mathfrak{a}$ einer Fläche konjugierten Punkte erfüllen im allgemeinen eine Kurve, die die geodätischen Linien durch $\mathfrak{a}$ einhüllt. Es sei nun $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ ein Paar konjugierter Punkte. Die Einhüllende habe in $\mathfrak{a}'$ keine Spitze. Dann kann man in der Nähe von $\mathfrak{a}'$ einen Punkt $\mathfrak{b}'$ der Einhüllenden so wählen, daß nach dem Hüllkurvensatz (§ 65) zwischen den Bögen die Beziehung besteht (vgl. Fig. 23, S. 111)

$$\overset{\frown}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} = \overset{\frown}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}'} + \overset{\frown}{\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'}.$$

Nun gibt es zwischen den Punkten $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}'$ sicher noch einen kürzeren Weg als die Einhüllende, da diese nicht geodätisch ist. Denn durch jedes Linienelement geht nur eine geodätische Linie. Somit gibt es von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{a}'$ im allgemeinen einen kürzeren Weg als den vorgegebenen geodätischen.

Diese Betrachtung versagt, wenn die Einhüllende in $\mathfrak{a}'$ eine $\mathfrak{a}$ „zugewandte“ Spitze hat (vgl. Fig. 32, S. 159).

§ 84. Satz von *Bonnet* über den Durchmesser einer Eifläche.

Nach den Vorbereitungen von § 82 und § 83 sind wir jetzt in der Lage, den zu Beginn von § 82 angekündigten Satz *Bonnet*s zu beweisen, den man auch so fassen kann:

Wenn für das Krümmungsmaß in allen Punkten einer Eifläche die Beschränkung $K \geqq (1 : A^2)$ *besteht, so gilt für ihren Durchmesser* $D < \pi A$.

---

[26]) Vgl. etwa *O. Bolza*, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig 1909, S. 82—87. Ein einfacher Beweis für die Bedingung *Jacobi*s im Fall der geodätischen Linien findet sich bei *G. Darboux*, Surfaces III (1894), S. 97.

[27]) *C. G. J. Jacobi*, Zur Theorie der Variationsrechnung, Werke IV. S. 39—55.

[28]) *G. Darboux*, Surfaces III, S. 86—88.

Dabei ist unter „Durchmesser" die Größtentfernung zweier Flächenpunkte zu verstehen. Zum Beweise greifen wir auf der Eifläche irgend zwei Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ heraus und nehmen als bekannt an, daß es einen allerkürzesten Weg auf der Fläche zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gäbe, und daß dieser einer geodätischen Linie angehöre. Dann liegt (§ 83) sicher der zu $\mathfrak{a}$ konjugierte Punkt $\mathfrak{a}'$ nicht diesseits $\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{a}' \geqq \mathfrak{b}$). Die räumliche Entfernung von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ ist jedenfalls $<$ als die geodätische Entfernung zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$. Dann braucht man also nur mehr zu zeigen:

Aus $K \geqq (1 : A^2)$ folgt, daß die geodätische Entfernung S zweier konjugierter Punkte einer geodätischen Linie $\leqq \pi A$ ist.

Das läßt sich folgendermaßen einsehen. Hat man zwei Differentialgleichungen

$$v'' + K(s)\, v = 0\,,$$
$$w'' + L(s)\, w = 0\,,$$

wobei

$$K(s) \geqq L(s)$$

ist, so liegen nach einem Satz von *J. C. F. Sturm*[29]) (1836) die Nullstellen von $v(s)$, kurz gesagt, dichter als die von $w(s)$. D. h. *bei wachsendem Krümmungsmaß rücken die konjugierten Punkte dichter zusammen.* Hat man also zwei Lösungen v, w mit einer gemeinsamen Nullstelle s_1, so kann die nächste Nullstelle s_2 von w nicht vor der nächsten Nullstelle von v liegen. Wir hätten nämlich sonst

$$\int_{s_1}^{s_2} \{v(w'' + Lw) - w(v'' + Kv)\}\, ds = 0 \tag{69}$$

oder durch Integration nach Teilen

$$[vw' - wv']_{s_1}^{s_2} = \int_{s_1}^{s_2} vw\,(K - L)\, ds\,.$$

Wegen der Randbedingungen ($v(s_1) = w(s_1) = w(s_2) = 0$) gibt das

$$v(s_2)\, w'(s_2) = \int_{s_1}^{s_2} vw\,(K - L)\, ds\,. \tag{70}$$

Wäre nun $v > 0$ in $s_1 < s \leqq s_2$ und $w > 0$ in $s_1 < s \leqq s_2$, so hätten wir $w'(s_2) < 0$, da w von positiven zu negativen Werten übergeht. Also wäre die linke Seite von (70) sicher kleiner als Null, während die rechte Seite $\geqq 0$ ist, was einen Widerspruch ergibt. Ähnlich erledigen sich die übrigen Fälle.

Setzen wir insbesondere $L = 1 : A^2 = \text{konst.}$, so wird

$$w = a \cos\left(\frac{s}{A}\right) + b \sin\left(\frac{s}{A}\right) \tag{71}$$

---

[29]) *J. C. F. Sturm*, Mémoire sur les équations différentielles du second ordre. Journal Liouville **1** (1836), S. 131.

und demnach wegen $w(s + \pi A) = -w(s)$

$$s_2 - s_1 = \pi A = \text{konst.}$$

Somit gilt für die Entfernung S benachbarter Nullstellen von v jedenfalls $S \leqq \pi A$.

Damit ist die Behauptung bestätigt. Der französische Mathematiker *Sturm* (1803—1855), von dem der hier benutzte Satz und verwandte Sätze aus der Algebra herrühren, soll der eigenen Wertschätzung dieser schönen „*Sturm*schen Sätze" in seinen Vorlesungen dadurch Ausdruck verliehen haben, daß er von den Theoremen sprach, „deren Namen zu tragen ich die Ehre habe".

Mittels der eben vorgetragenen Schlußweise zeigt man auch leicht: *Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen einer Lösung der Differentialgleichung* $v'' + Kv = 0$ *liegt immer genau eine Nullstelle jeder davon linear unabhängigen Lösung derselben Gleichung.*

Bonnet hat seinen Satz und im wesentlichen auch den hier mitgeteilten Beweis 1855 veröffentlicht[30]).

An den von *Minding* aufgestellten, spindelförmigen Drehflächen konstanter Krümmung kann man leicht feststellen, daß die Ungleichheit *Bonnet*s die wahre Schranke liefert, d. h. daß D dem Wert πA beliebig nahe rücken kann.

Die ganze vorgetragene Beweisart hat noch einen Haken. Es wurde nämlich als „selbstverständlich" hingestellt, daß es zwischen zwei Punkten einer Eifläche wirklich stets einen allerkürzesten Weg gibt, der einer geodätischen Linie angehört. Auf diese Schwierigkeit kommen wir im nächsten Abschnitt zurück. Einen Beweis, der die Existenzfrage umgeht und auch weitergehende Ergebnisse liefert, hat der Verfasser 1916 erbracht[31]).

§ 85. Das Vorhandensein kürzester Wege auf Eiflächen.

Es ist im vorhergehenden die Frage aufgetaucht: Gibt es zwei Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einer Eifläche $\mathfrak{F}$ immer einen kürzesten Weg zwischen auf $\mathfrak{F}$? Wenn ja, ist dann dieser kürzeste Weg geodätisch? Für diese vom Standpunkt des Physikers ziemlich selbstverständliche Tatsache soll hier ein Beweis erbracht werden unter der Voraussetzung, daß die Eifläche beschränkt und durchweg regulär und analytisch sein soll. Bezeichnen wir den größten Wert des Krümmungsmaßes K auf $\mathfrak{F}$ mit $1 : B^2$, so folgt aus $K \leqq 1 : B^2$ nach dem *Sturm*schen Satz von § 84 für die geodätische Entfernung S zweier konjugierter Punkte

$$S \geqq \pi B \tag{72}$$

---

[30]) *O. Bonnet,* Comptes rendus, Paris **40** (1855), S. 1311—1313.

[31]) Man vgl. etwa *W. Blaschke,* Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 119.

genau entsprechend, wie wir vorhin S nach oben hin abgeschätzt haben.

Ziehen wir daher von einem Punkte $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{F}$ aus in allen Richtungen geodätische Bogen von der Länge πB, so überdecken diese den geodätischen Entfernungskreis $\{\mathfrak{a}, \pi B\}$. Dreht man nämlich diesen „geodätischen Radius“ so um seinen Anfangspunkt $\mathfrak{a}$, daß der Anfangswinkel φ mit einer festen Richtung in der Tangentenebene von $\mathfrak{a}$ stetig wachsend die Werte von $0 \leqq \varphi < 2\pi$ durchläuft, so hat nach Voraussetzung die Differentialgleichung *Jacobi*s

$$\frac{d^2\delta n}{dr^2} + K\delta n = 0,$$

worin (vgl. § 57)

$$\delta n = \sqrt{G}\cdot d\varphi, \qquad \left(\frac{d\delta n}{dr}\right)_{r=0} = d\varphi$$

die Entfernung zum unendlich benachbarten Radius angibt, eine positive Lösung ($\delta n > 0$ für $0 < r < \pi B$). Deshalb bewegt sich dieser Radius stets nach derselben Seite vorwärts. Da er schließlich ($\varphi = 2\pi$) in die Ausgangslage ($\varphi = 0$) zurückkehrt, ist man versucht zu schließen, daß die geodätischen Radien durch $\mathfrak{a}$ mit der Länge πB die Kreisfläche $\{\mathfrak{a}, \pi B\}$ „*schlicht*“ überdecken, d. h. daß durch jeden inneren Punkt ($\neq \mathfrak{a}$) der Fläche ein einziger dieser Radien hindurchgeht. Von der Unzulässigkeit dieser Schlußweise kann man sich am besten an einer dünnen und langen Ringfläche überzeugen, wo ein derartiger Kreis ähnlich wie das Deckblatt einer Zigarre um den Ring herumgeschlungen ist.

Es handelt sich für das folgende darum, sich einen geodätischen Radius $2R > 0$ so zu verschaffen, daß alle Kreise $\{\mathfrak{a}, 2R\}$ auf unsrer Eifläche $\mathfrak{F}$ schlicht ausfallen bei beliebiger Wahl des Mittelpunkts $\mathfrak{a}$. Das kann man etwa so erreichen. Angenommen, der Kreis $\{\mathfrak{a}, \pi B\}$ sei nicht schlicht. Dann verkleinern wir bei festem Mittelpunkt $\mathfrak{a}$ den geodätischen Halbmesser solange, bis der Kreis aufhört sich selbst zu überdecken. Der erste solche Kreis habe den geodätischen Radius T. Er wird sich selbst in einem Umfangspunkt $\mathfrak{p}$ berühren und seine beiden Radien durch $\mathfrak{p}$ werden zusammen ein geodätisches Eineck mit der Ecke $\mathfrak{a}$ bilden, denn in $\mathfrak{p}$ schließen sie glatt aneinander, da beide den Umfang senkrecht durchschneiden. Auf dieses Eineck wenden wir die Formel von *Gauß-Bonnet* (§ 63, 64) an und finden

$$\omega + \int K\cdot do = 2\pi,$$

wenn ω den Außenwinkel bei $\mathfrak{a}$ bedeutet. Wenn wir eine geeignete unter den beiden von unserm Eineck begrenzten Flächen auswählen so wird $0 \leqq \omega < \pi$ und daher

$$\pi - \int K\, do \leqq 2\pi$$

sein. Das Integral ist die vom sphärischen Abbild unsres Einecks

auf der Einheitskugel umschlossene Fläche Ω. Nach dem isoperimetrischen Satze für Kurven auf der Kugel (§ 31, Aufgabe 6) gilt demnach für den Umfang Λ des sphärischen Bildes unsres Einecks

$$\Lambda^2 \geqq 4\pi^2 - (2\pi - \Omega)^2 > 3\pi^2.$$

Es seien nun ds und $d\sigma$ entsprechende Bogenelemente auf der Eifläche $\mathfrak{F}$ und ihrem sphärischen Bilde und ϱ das Minimum von $(ds : d\sigma)$ auf $\mathfrak{F}$. Nebenbei ist ϱ der kleinste Hauptkrümmungshalbmesser von $\mathfrak{F}$. Dann haben wir für den Umfang $2T$ unsres Einecks

$$2T \geqq \varrho\Lambda > \sqrt{3}\,\pi\varrho.$$

Ist nun $2R$ die kleinere der beiden Zahlen πB und $\sqrt{3}\,\pi\varrho$, so wissen wir, daß jeder geodätische Mittelpunktskreis $\{\mathfrak{a}, 2R\}$ auf $\mathfrak{F}$ von seinen Radien schlicht bedeckt wird.

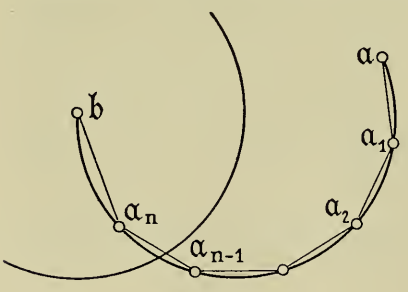
Liegt nun $\mathfrak{b}$ innerhalb oder auf dem Rande des Kreises $\{\mathfrak{a}, 2R\}$, so gibt der Teilbogen r des „geodätischen Radius" dieses Kreises, der von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ führt, den kürzesten Weg zwischen diesen Punkten. Führt man nämlich geodätische Polarkoordinaten (§ 57) mit $\mathfrak{a}$ als Ursprung auf $\mathfrak{F}$ ein, so ist wegen $G > 0$ in leicht verständlicher Bezeichnungsweise

$$\int_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} ds = \int_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} \sqrt{dr^2 + G\,d\varphi^2} \geqq \int_{\mathfrak{a}} |\,dr\,| \geqq r. \tag{73}$$

Das gilt für alle Kurven, die den Kreis $\{\mathfrak{a}, 2R\}$ nirgends verlassen. Tritt hingegen eine $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ verbindende Kurve aus diesem Kreise bei $\mathfrak{c}$ heraus, so ist nach dem eben bewiesenen schon ihr Teilbogen von $\mathfrak{a}$ bis $\mathfrak{c}$ sicher $\geqq 2R \geqq r$.

Man kann das Ergebnis auch so fassen: *Gibt es zwischen zwei Punkten* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *von* $\mathfrak{F}$ *einen Weg von der Länge* $S \leqq 2R$, *dann gibt es immer auch eine kürzeste Verbindung, nämlich auf einem geodätischen Radius des Kreises* $\{\mathfrak{a}, 2R\}$.

Die Länge dieses kürzesten Weges wollen wir die geodätische Entfernung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nennen und mit $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = [\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}]$ bezeichnen.



Figur 28.

Davon kann also zunächst nur dann die Rede sein, wenn es zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einen Weg $S \leqq 2R$ gibt.

So bleibt nun der Fall zu behandeln, daß $\mathfrak{b}$ außerhalb des Kreises $\{\mathfrak{a}, 2R\}$ liegt.

Wir verbinden zunächst $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{F}$ durch einen Weg $\mathfrak{C}$ von endlicher Länge S. Dieser Kurve $\mathfrak{C}$ soll in folgender Weise eine „geodätische Gelenkkette von der Gliedlänge R" einbeschrieben werden. (Vgl. Fig. 28). Wir verbinden $\mathfrak{a}$ radial mit dem ersten Austrittspunkt $\mathfrak{a}_1$

von $\mathfrak{C}$ aus dem Kreise $\{\mathfrak{a}, R\}$, so daß $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1] = R$ wird. Ebenso $\mathfrak{a}_1$ mit dem ersten Austrittspunkt $\mathfrak{a}_2$ von $\mathfrak{C}$ aus dem Kreise $\{\mathfrak{a}_1, R\}$. Dieses Verfahren setzen wir so lange fort, bis wir zu einem Punkt $\mathfrak{a}_n$ von $\mathfrak{C}$ kommen, für den $[\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}] \leqq R$ ist. Diesen Punkt $\mathfrak{a}_n$ erreichen wir in endlich vielen, nämlich in $n < S:R$ Schritten, denn jeder Bogen $\mathfrak{a}_{k-1}\mathfrak{a}_k$ ist länger $(\geqq)[\mathfrak{a}_{k-1}\mathfrak{a}_k] = R$, also ist $S > nR$, wie behauptet wurde. $\mathfrak{a}_k$ verbinden wir mit $\mathfrak{b}$ durch den von $\mathfrak{b}$ ausgehenden geodätischen Radius. Damit ist unsere Gelenkkette vollendet. Für ihre Länge L gilt

$$S \geqq L = nR + [\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}]. \tag{74}$$

Da die Länge S der ursprünglichen Kurve $\mathfrak{C}$ jedenfalls $\geqq$ der Länge L der einbeschriebenen Kette ist, so brauchen wir nur zu zeigen, daß es unter den Längen dieser $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ verbindenden Ketten mit der Gliedlänge R, deren Gliederzahl höchstens n ist, eine kürzeste gibt. Das ist aber verhältnismäßig leicht einzusehen.

Es sei L_0 die untere Grenze der Längen aller „zulässigen" Ketten, wie wir kurz sagen wollen. Wir können jedenfalls aus der Menge dieser zulässigen Ketten eine Folge herausgreifen, so daß für die zugehörigen Bogen die Beziehung besteht

$$L^\nu \to L_0 \quad \text{für} \quad \nu \to \infty.$$

Die zugehörigen Gelenke $\mathfrak{a}_k^\nu$ haben jedenfalls einen Häufungspunkt auf $\mathfrak{F}$, da $\mathfrak{F}$ beschränkt ist. Wir können daher aus der Folge unserer Ketten eine Teilfolge so aussondern, daß, wenn wir die alte Bezeichnung beibehalten, die Beziehung besteht

$$\mathfrak{a}_1^\nu \to \mathfrak{a}_1^0 \quad \text{für} \quad \nu \to \infty.$$

Daraus sondern wir eine neue Folge aus, so daß auch die Punktfolge der $\mathfrak{a}_2^\nu$ konvergiert:

$$\mathfrak{a}_2^\nu \to \mathfrak{a}_2^0,$$

usf. Dann haben wir

$$\mathfrak{a}_k^\nu \to \mathfrak{a}_k^0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, m \leqq n,$$

wenn m die letzte Fußmarke ist, für die der zugehörige Häufungspunkt nicht innerhalb $\{\mathfrak{b}, R\}$ fällt.

Es wird behauptet: Die so gefundene Kette $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1^0, \mathfrak{a}_2^0, \ldots, \mathfrak{a}_m^0, \mathfrak{b}$ ist zulässig und hat die Länge L_0. Dazu ist zu zeigen

$$[\mathfrak{a}_{k-1}^0\mathfrak{a}_k^0] = R \tag{75}$$

und

$$[\mathfrak{a}_m^0\mathfrak{b}] = \lim [\mathfrak{a}_m^\nu\mathfrak{b}]. \tag{76}$$

Da beide Nachweise gleich verlaufen, genügt es, etwa den ersten zu führen. Wegen der Konvergenz

$$\lim_{\nu\to\infty} [\mathfrak{a}_{k-1}^\nu\mathfrak{a}_{k-1}^0] = 0, \qquad \lim_{\nu\to\infty} [\mathfrak{a}_k^\nu\mathfrak{a}_k^0] = 0$$

ist für hinlänglich großes ν

$$S = [\mathfrak{a}_{k-1}^0 \mathfrak{a}_{k-1}^\nu] + [\mathfrak{a}_{k-1}^\nu \mathfrak{a}_k^\nu] + [\mathfrak{a}_k^\nu \mathfrak{a}_k^0] < 2R.$$

Also existiert nach dem früher hervorgehobenen Ergebnis die geodätische Entfernung von $\mathfrak{a}_{k-1}^0$ nach $\mathfrak{a}_k^0$. Es ist

$$[\mathfrak{a}_{k-1}^0 \mathfrak{a}_k^0] \leqq S.$$

Daraus folgt für $\nu \to \infty$

$$[\mathfrak{a}_{k-1}^0 \mathfrak{a}_k^0] \leqq R.$$

Vertauscht man in dieser Überlegung die Rolle der oberen Marken ν und 0, so zeigt man ebenso

$$[\mathfrak{a}_{k-1}^0 \mathfrak{a}_k^0] \geqq R.$$

Es bleibt somit nur die Möglichkeit (75) übrig.

Damit ist das Vorhandensein eines kürzesten Weges zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bewiesen, und zwar ist dieser kürzeste Weg eine Kette. Jetzt kann man leicht einsehen, daß die Glieder dieser Kette an den Gelenken $\mathfrak{a}_k^0$ glatt aneinanderschließen, daß also die ganze Kette auf einer einzigen geodätischen Linie aufliegt. Unsere Kette muß nämlich wegen ihrer Kleinsteigenschaft auch zwischen den Punkten $\mathfrak{a}_{k-1}^0$, $\mathfrak{a}_{k+1}^0$ $(k = 1, 2 \ldots m-1)$ die kürzeste Verbindung ergeben, also (da zwischen diesen Punkten ein Weg der Länge $2R$ vorhanden ist) mit dem geodätischen Radius zusammenfallen, der $\mathfrak{a}_{k-1}^0$ mit $\mathfrak{a}_{k+1}^0$ verbindet. Damit ist gezeigt, daß in $\mathfrak{a}_k^0$ keine Ecke sein darf. Entsprechend erkennt man dies auch noch für $\mathfrak{a}_m$. Damit ist der Nachweis beendet und gezeigt:

Unter den zwei Punkte $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *auf einer Eifläche verbindenden Wegen gibt es stets einen allerkürzesten. Dieser gehört einer geodätischen Linie an.*

Seit *D. Hilbert*s Untersuchungen von 1899 über das *Dirichlet*sche Prinzip sind die Fragen nach dem Vorhandensein eines absoluten Extremums besonders von *H. Lebesgue* und *C. Carathéodory* behandelt worden[32]). Das hier vorgetragene Verfahren hat den Vorteil — wenn wir uns etwas anders ausdrücken als in diesem Abschnitt — nur den Satz von *Weierstraß* über das Vorhandensein eines Extremums bei stetigen Funktionen heranzuziehen. Freilich gibt es neuerdings „Expressionisten" (vielleicht könnte man auch sagen „Bolschewisten") unter den Mathematikern, die auch die Berechtigung dieses Hilfsmittels leugnen.

---

[32]) Literaturangaben bei *O. Bolza*, Variationsrechnung, 9. Kapitel, S. 419.

§ 86. Flächen, deren konjugierte Punkte festen geodätischen Abstand haben.

Es mögen hier einige Bemerkungen über eine Aufgabe der Flächentheorie folgen, die bisher noch nicht gelöst zu sein scheint, und die recht anziehend ist. Man kann diese Aufgabe auf zwei verschiedene Arten fassen.

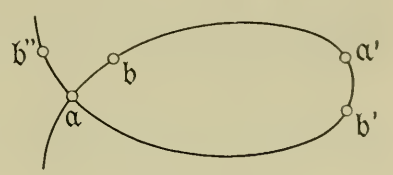
Geht man von einem Punkt $\mathfrak{a}$ einer Fläche längs einer geodätischen Linie bis zum konjugierten Punkt $\mathfrak{a}'$ (§ 83), so wird der zurückgelegte Weg $\overset{\frown}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}$ im allgemeinen vom Ausgangspunkt und von der Ausgangsrichtung abhängen. Man kann sich nun fragen:

I. *Welches sind die Flächen, bei denen die geodätische Entfernung konjugierter Punkte fest ist.*

Nach dem Hüllenkurvensatz von § 65 muß sich dann die Einhüllende aller geodätischen Linien durch einen Punkt $\mathfrak{a}$ der Fläche auf einen einzigen Punkt $\mathfrak{a}'$ zusammenziehen. D. h. $\mathfrak{a}$ hat auf der Fläche nur einen einzigen konjugierten Punkt $\mathfrak{a}'$. Somit liegt die Fragestellung nahe:

II. *Alle Flächen zu suchen, bei denen zu jedem Punkt nur ein einziger konjugierter Punkt vorhanden ist.*

Wir wollen zeigen, daß dann notwendig die geodätische Entfernung konjugierter Punkte unveränderlich ist, so daß also die Fragen I und II gleichwertig sind. Durchläuft man eine geodätische Linie von $\mathfrak{a}$ ausgehend bis zum konjugierten Punkt $\mathfrak{a}'$ und darüber hinaus, so kommt man wegen der Wechselseitigkeit der Beziehung der konjugierten Punkte zum Ausgangspunkt $\mathfrak{a}$ zurück, und zwar mit der Anfangsrichtung, so daß alle geodätischen Linien geschlossen sind. Fielen nämlich Ausgangs- und Endrichtung des geodätischen Bogens in $\mathfrak{a}$ nicht zusammen, so müßte, wenn man $\mathfrak{a}'$ nach $\mathfrak{b}'$ vorrückt, der zugehörige konjugierte Punkt zu $\mathfrak{b}'$, da sich die Nullstellen der Differentialgleichung *Jacobi*s nach *Sturm* (§ 84) trennen, im selben Sinne auf unsrer geodätischen Linie fortwandern. Also würde er, je nachdem man den „vorwärts" oder „rückwärts" konjugierten Punkt auswählt, in zwei verschiedene Punkte $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{b}$ fallen, was sich mit der Voraussetzung nicht verträgt. (Fig. 29.)



Figur 29.

Jetzt läßt sich zunächst einsehen, daß unsre Fläche den Zusammenhang der Kugel hat. Alle geodätischen Bogen zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ haben nämlich nach dem Satz über Einhüllende (§ 65) dieselbe Länge R. Nach der Schlußweise von § 85 wird der „geodätische Entfernungskreis" mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{a}$ und dem Radius R

von seinen Radien genau einfach überdeckt. Da alle Radien in $\mathfrak{a}'$ zusammenlaufen, kann man diese Figur wirklich eineindeutig und stetig einer Kugel mit den auf ihr gezeichneten Meridianen zuordnen. Die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ hälften den Umfang jeder durch sie laufenden, geschlossenen geodätischen Linie.

Aus den Beziehungen von *Sturm* (§ 84) zwischen den Nullstellen von Lösungen linearer homogener Differentialgleichungen zweiter Ordnung folgt, daß die Paare konjugierter Punkte einer geschlossenen geodätischen Linie einander trennen. Wenn man daher alle geschlossenen geodätischen Linien durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ betrachtet, so erkennt man, daß ede unter ihnen die Fläche in zwei Teile zerschneidet, so daß die Punkte des einen Teils zu denen des andern konjugiert sind. Da jede weitere geschlossene geodätische Linie zu jedem ihrer Punkte auch den konjugierten enthält, erkennt man, daß irgend zwei unsrer geschlossenen geodätischen Linien sich schneiden müssen, und zwar offenbar in konjugierten Punkten. Daraus folgt aber, daß alle unsre geschlossenen geodätischen Linien denselben Umfang haben, daß also die Entfernung konjugierter Punkte, die gleich dem halben Umfang ist, konstant sein muß, wie behauptet wurde.

Von unsren Flächen kann man noch leicht sehen, daß sie durch die Zuordnung $\mathfrak{a} \leftrightarrow \mathfrak{a}'$ längentreu auf sich selbst abgebildet sind. Rückt nämlich $\mathfrak{a}$ um ein Stückchen auf einer geodätischen Linie fort, so rückt $\mathfrak{a}'$ auf derselben geodätischen Linie im gleichen Sinne um dasselbe Stück vorwärts. Also sind die Linienelemente durch $\mathfrak{a}$ längentreu auf die durch $\mathfrak{a}'$ bezogen. Nach *Gauß*ens Theorema egregium stimmen demnach die Krümmungsmaße unsrer Fläche in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ überein.

Es sei noch erwähnt, daß für das Krümmungsmaß K auf unsrer Fläche die Beziehung besteht:

$$\int_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}'} \frac{\partial K}{\partial n}\, u\, v\, w\, ds = 0. \tag{77}$$

Darin bedeuten u, v, w irgend drei Lösungen der Differentialgleichung von *Jacobi* $u'' + Ku = 0$ längs des geodätischen Integrationswegs. Sind nämlich r, φ geodätische Polarkoordinaten mit dem Ursprung $\mathfrak{a}$ und ist $ds^2 = dr^2 + u^2 d\varphi^2$ das Linienelement, so genügt u als Funktion von r der Gleichung von *Jacobi*

$$u'' + Ku = 0.$$

Durch Ableitung nach φ folgt daraus

$$u_\varphi'' + K u_\varphi = -\frac{\partial K}{\partial \varphi} \cdot u = -\frac{\partial K}{\partial n} u^2.$$

Multipliziert man die erste dieser Differentialgleichungen mit u_η, die zweite mit u, so folgt durch Subtraktion und Integration

$$\int_a^{a'} \{u_\eta(u'' + Ku) - u(u_\eta'' + Ku_\eta)\}\, dr = [u_\eta u' - u u_\eta']_a^{a'} = \int_a^{a'} \frac{\partial K}{\partial n} u^3\, dr.$$

Da am Rande u und u_η verschwinden, so folgt

$$\int_a^{a'} \frac{\partial K}{\partial n} u^3\, dr = 0.$$

Hieraus ergibt sich leicht die ein wenig allgemeinere Formel (77), wenn man für u eine Linearkombination mehrerer Lösungen einsetzt. Die Integration ist längs eines geodätischen Bogens zwischen zwei konjugierten Punkten zu erstrecken. $\partial K : \partial n$ bedeutet die Ableitung des Krümmungsmaßes senkrecht zu diesem Bogen.

Obgleich von unsren Flächen schon recht viel Eigenschaften bekannt sind, scheint es doch noch ziemlich schwierig zu sein, festzustellen, ob unsre Flächen notwendig Kugeln sind oder nicht.

Es soll hier noch eine kleine Warnungstafel errichtet werden, ein Hinweis, wie man den Beweis *nicht* weiterführen darf.

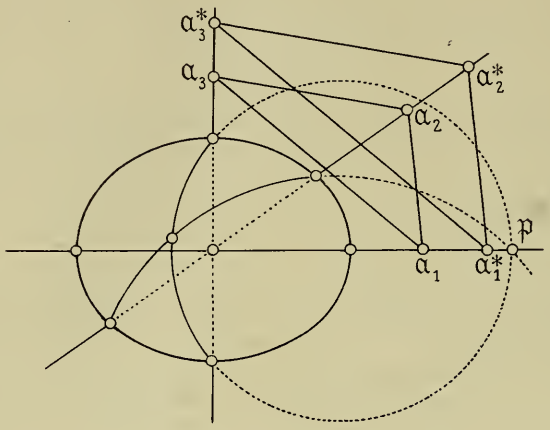
Man ordne unsre Fläche vom Zusammenhang der Kugel zweieindeutig einer neuen Fläche zu, so daß jedem Paar konjugierter Punkte ein einziger Punkt der neuen Fläche entspricht. Dann hat die neue Fläche, wie man leicht einsieht, den Zusammenhang der projektiven Ebene. Das Abbild der geodätischen Linien ist eine zweiparametrige Kurvenschar mit der Eigenschaft, daß durch irgend zwei Flächenpunkte genau eine Kurve der Schar geht, und daß zwei Kurven der Schar stets einen Schnittpunkt gemein haben. Wenn es auf Grund dieser topologischen Eigenschaften allein möglich wäre zu beweisen, daß unsre neue Fläche mit ihrer Kurvenschar sich eineindeutig auf die projektive Ebene mit den Geraden der Ebene abbilden ließe, dann wäre unsre ursprüngliche Fläche „geodätisch" auf die Ebene abgebildet. D. h., daß die geodätischen Linien in die Geraden übergingen. Nach einem Satz von *E. Beltrami* (§ 74, Aufg. 13) hätte die Fläche dann festes Krümmungsmaß und müßte wegen ihrer Geschlossenheit eine Kugel sein (§ 75).

Indessen ist die benutzte topologische Annahme unzulässig: Es lassen sich in der projektiven Ebene zweiparametrige Kurvenscharen angeben, so daß durch zwei Punkte eine Kurve der Schar hindurchgeht und zwei Kurven immer einen Schnittpunkt haben, die sich aber nicht in die Geraden überführen lassen. Dafür hat *D. Hilbert* ein sehr anschauliches Beispiel erbracht[33]). Man schneide aus der

---

[33]) *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, 3. Aufl. § 23, S. 72 u. f. Leipzig und Berlin 1909.

projektiven Ebene das Innere einer Ellipse heraus und ersetze jede Gerade, soweit sie ins Innere der Ellipse eindringt, durch einen anschließenden Kreisbogen, dessen Verlängerung durch einen festen Punkt $\mathfrak{p}$ in der Verlängerung der großen Achse geht (Fig. 30). Die so entstandene Kurvenschar kann nicht durch Verzerrung der Ebene



Figur 30.

aus den Geraden hervorgehen; denn sonst müßte für die abgeänderten „Geraden" der Satz von *Desargues* gelten: Schneiden sich entsprechende Seiten $(\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k,\ \mathfrak{a}_i^*\,\mathfrak{a}_k^*)$ zweier Dreiecke auf einer Geraden, so gehen die Verbindungsstrecken entsprechender Ecken $(\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_i^*)$ durch einen Punkt. Das ist aber, wie man aus unsrer Figur erkennt, im allgemeinen nicht der Fall[34]).

§ 87. Ein Satz *Carathéodorys* über die Hüllkurven geodätischer Linien auf Eiflächen.

Es sei $\mathfrak{F}$ eine Eifläche, also eine durchweg reguläre analytische, geschlossene konvexe Fläche. Das Krümmungsmaß auf der Fläche genüge den Bedingungen

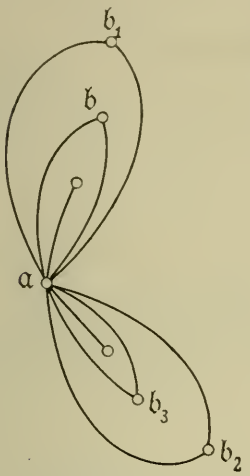
$$\frac{1}{A^2} \leqq K \leqq \frac{1}{B^2}. \tag{78}$$

Dann bestehen nach § 84 für die geodätische Entfernung konjugierter Punkte die Beziehungen

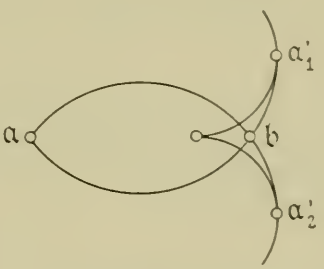
$$\pi B \leqq S \leqq \pi A. \tag{79}$$

[34]) Bei den Ausführungen dieses Abschnitts hat sich der Verfasser mehrfach auf mündliche Mitteilungen seines verehrten Kollegen *J. Radon* stützen können.

Betrachten wir einen durch einen Punkt a der Eifläche gehenden gerichteten Extremalenbogen (Fig. 31). Dann gibt es darauf (§ 86) einen zu a konjugierten Punkt a'. Im allgemeinen hört der Bogen schon vor a' auf, einen kleinsten Weg von a aus zu liefern, wie die Schlußweise am Ende von § 83 lehrt. Es gibt also im allgemeinen einen Punkt b auf unsrer Extremalen zwischen a und a', so daß der Extremalbogen ac, wenn c vor b liegt, einen kürzesten Weg ergibt, nicht aber, wenn c hinter b liegt. Dann gibt es offenbar von a nach b zwei gleichlange kürzeste Wege. Diese Wege liegen getrennt und begrenzen auf der Fläche ein Zweieck. Geht man von einer zweiten geodätischen Linie durch a aus, so kommt man zu einem andern solchen geodätischen Zweieck. Zwei solche Zweiecke liegen, wegen der Kleinsteigenschaft der begrenzenden geodätischen Bogen, getrennt, so daß jedes ganz in eines der einfach zusammenhängenden Stücke unsrer Eifläche fällt, in das unsre Eifläche



Figur 31.



Figur 32.

durch das andre zerschnitten wird. Es muß deshalb mindestens zweimal vorkommen, daß unsre Zweiecke sich auf eine doppelt überdeckte Strecke zusammenziehen. Der von a verschiedene Endpunkt einer solchen Strecke ist aber eine Spitze der Einhüllenden der geodätischen Linien durch a, soweit sie als Ort der ersten zu a konjugierten Punkte anzusehen ist. Man erhält auf diese Art die dem Punkt a zugekehrten Spitzen der Einhüllenden (Fig. 32), die nach dem Satz von § 65 einem Mindestwert der geodätischen Entfernung $a\,a'$ entsprechen. Wegen der Stetigkeit gibt es dazwischen auch mindestens zwei Größtwerte von $a\,a'$, die den von a abgekehrten Spitzen entsprechen. Somit ist das Vorhandensein von mindestens vier Spitzen gesichert, wenn der Ort des Punktes a' nicht auf einen einzigen Punkt zusammenschrumpft.

Scheinbare Ausnahmefälle könnten nur dann auftreten, wenn bei der Drehung des geodätischen Bogens um a der Punkt a' die Hüll-

kurve mehr als einmal durchliefe. Dann wären aber die Spitzen mit der betreffenden Vielfachheit zu zählen.

Damit ist folgender Satz bewiesen, dessen Kenntnis der Verfasser einer Mitteilung des Herrn *C. Carathéodory* (1912) verdankt:

Der Ort der zu einem Punkte einer Eifläche konjugierten Punkte hat mindestens vier Spitzen.

Daß es solche Hüllkurven mit genau vier Spitzen wirklich gibt, kann man am Ellipsoid sehen.

Der ganze Beweis gilt allgemeiner auch für beliebige, positiv definite Variationsprobleme auf der Kugel, bei denen die Eichkurven (§ 82) konvex sind.

§ 88. Aufgaben und Lehrsätze.

1. **Eine Kennzeichnung der Eiflächen.** Eine geschlossene, zweiseitige und überall positiv gekrümmte Fläche ist notwendig eine Eifläche. *J. Hadamard*, Liouvilles Journal (5) **3** (1897), S. 352.

2. **Zum Problem von *Christoffel*.** Die Formel (35) für $R_1 + R_2$ läßt sich nach *Weingarten* auch so schreiben

$$R_1 + R_2 = (2 + \Delta)\,p, \tag{80}$$

wobei $p(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ die Stützfunktion auf der Einheitskugel ist und Δ den zweiten Differentiator *Beltrami*s bezüglich des Bogenelements der Kugel bedeutet. Die in § 79 mittels der Kugelfunktionen gelöste Differentialgleichung

$$(2 + \Delta)\,p = f \tag{81}$$

auf der Kugel läßt sich auch mittels einer *Green*schen Funktion lösen.

$$p(\xi) = \frac{1}{4\pi}\int f(\eta)\,\{1 - (\xi\cdot\eta)\log[1 - (\xi\cdot\eta)]\}\cdot d\omega_\eta. \tag{82}$$

Die Formel (80) steht bei *J. Weingarten*, Über die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen, Festschrift der Technischen Hochschule. Berlin 1884.

3. **Flächeninhalte der Normalrisse einer Eifläche.** Es sei $\mathfrak{F}$ eine Eifläche, auf der das Krümmungsmaß den Bedingungen genügt

$$\frac{1}{A^2} \leqq K \leqq \frac{1}{B^2}. \tag{78}$$

Es sei F der Flächeninhalt des Normalrisses (der orthogonalen Projektion) von $\mathfrak{F}$ auf eine Ebene. Dann ist

$$\pi B^2 \leqq F \leqq \pi A^2, \tag{83}$$

und ein Gleichheitszeichen kann nur gelten, wenn $\mathfrak{F}$ eine Kugel ist.

4. **Eine Ungleichheit von *Carathéodory* für die Flächeninhalte der Normalrisse einer Eifläche.** Sind F_i die Flächeninhalte der Normal-

risse auf drei paarweis senkrechte Ebenen, F der auf eine beliebige vierte Ebene, so ist

$$F^2 \leqq F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 . \tag{84}$$

Vgl. *W. Blaschke*, Kreis und Kugel. S. 148.

5. **Kugeln in einer Eifläche.** Die größte Kugel, die in einer Eifläche unbehindert rollen kann, hat den kleinsten Hauptkrümmungshalbmesser der Eifläche zum Halbmesser. Vgl. ebenda S. 118—119.

6. **Kugeln um eine Eifläche.** Die kleinste Kugel, in der eine Eifläche unbehindert rollen kann, hat den größten Hauptkrümmungshalbmesser der Eifläche zum Halbmesser. Ebenda S. 118—119.

7. **Umkehrung eines Satzes von *Archimedes* über die Kugel.** Aus einer Eifläche werde durch irgend zwei sich schneidende, parallele Ebenen im Abstand h stets eine Zone mit der Oberfläche $2\pi a h$ ausgeschnitten. Dann ist die Eifläche notwendig eine Kugel vom Halbmesser a. Man zeige zunächst, daß die Krümmung konstant gleich $1 : a^2$ ist.

Die allgemeinere Aufgabe, die man erhält, wenn man a nicht als unabhängig von der Stellung der Schnittebenen voraussetzt, scheint ziemlich schwierig zu sein.

8. **Eine kennzeichnende Eigenschaft der Kugel.** Die einzigen Eiflächen, bei denen zwischen Krümmung K und Entfernung P der Tangentenebene von einem Festpunkt $\mathfrak{o}$ die Beziehung besteht

$$K = \frac{c}{P^2}, \quad c = \text{konst.}, \tag{85}$$

sind die Kugeln.

Man zeige zunächst durch Betrachtung der Flächenstellen, wo P seinen größten und kleinsten Wert annimmt, daß $c = 1$ sein muß. Bedeutet nun do das Element der Oberfläche, $d\omega$ das des sphärischen Bildes, so folgt aus $K = 1 : P^2 = d\omega : do$ das Bestehen der Beziehung

$$\tfrac{1}{3} \int P\, do = \tfrac{1}{3} \int P^3\, d\omega . \tag{86}$$

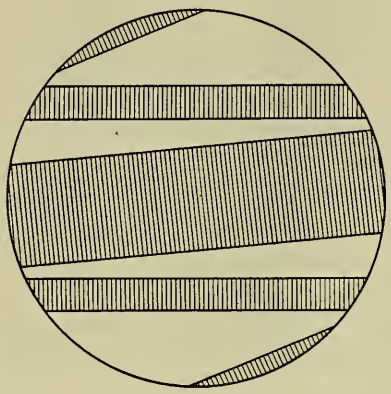
D. h. aber: der Rauminhalt der Eifläche ist gleich dem Rauminhalt ihrer Fußpunktsfläche bezüglich des Festpunkts $\mathfrak{o}$. Bei einer nichtkugelförmigen Fläche liegt nun die Fußpunktsfläche außerhalb der ursprünglichen Eifläche. Somit ist dann

$$\tfrac{1}{3} \int P\, do < \tfrac{1}{3} \int P^3\, d\omega . \tag{87}$$

9. **Eidrehflächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.** Läßt sich zu einer Eilinie $\mathfrak{E}$ mit der Symmetrieachse $\mathfrak{A}$ ein Kreis $\mathfrak{K}$ so angeben, daß jede Parallele zu $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{K}$ gleichlange Bogen abschneidet, so entsteht durch Umdrehung von $\mathfrak{E}$ um $\mathfrak{A}$ eine Eifläche, deren sämtliche geodätische Linien geschlossen sind. Vgl. *G. Darboux*, Surfaces, Beginn des 3. Bandes. Weitere Literatur über Flächen mit

geschlossenen geodätischen Linien: *O. Zoll*, Math. Annalen **57** (1903), S. 108 und *P. Funk*, Math. Ann. **74** (1913), S. 278.

Mittels der Konstruktion von *Darboux* lassen sich auch Nicht-Drehflächen, die aber aus Stücken von Drehflächen zusammengesetzt sind, angeben, die die gewünschte Eigenschaft haben. Es mag dieser Gedanke, der von *Gerhard Thomsen*, einem Zuhörer des Verfassers, stammt, durch die beigegebene Figur angedeutet werden (Fig. 33). Man geht von einer Kugel aus und ersetzt die Kugel zonenweise durch geeignete Drehflächen. *Thomsen* hat auch gezeigt: Man betrachte eine durch stückweise Formänderung einer Kugel entstandene Eifläche mit lauter geschlossenen geodätischen Linien. Dann kann der abgeänderte Teil der Kugelfläche nicht innerhalb einer Halbkugelfläche liegen, wenigstens nicht, wenn wir seine Randkurve als ungeknickt voraussetzen.



Figur 33.

10. **Geodätische Zweiecke.** Auf einer Fläche negativen Krümmungsmaßes kann es niemals zwei verschiedene, zwischen zwei verschiedenen Punkten der Fläche verlaufende geodätische Linien geben, die auf der Fläche stetig ineinander überführbar wären. *J. Hadamard*, Liouvilles Journal (5) **3** (1897), S. 331.

11. **Über geodätische Linien auf Eiflächen.** Durch jeden Punkt einer Eifläche gibt es eine ausgezeichnete Richtung, so daß die in dieser Richtung von dem Punkte auslaufende geodätische Linie wieder zu dem Punkt zurückkehrt, nachdem sie unterwegs nur einen zum Ausgangspunkt konjugierten Punkt durchlaufen hat (*C. Carathéodory*).

12. **Eine Frage von *C. Carathéodory*.** Gibt es auf jeder Eifläche ein Punktepaar, so daß jede geodätische Linie durch den einen Punkt des Paares notwendig auch durch den andern geht? Auf einem Ellipsoid spielen bekanntlich die Nabelpunkte eine solche Rolle.

13. **Ein Satz von *L. Berwald* über Flächen mit fester mittlerer Krümmung.** Auf einer Fläche lassen sich nur dann die natürlichen Parameter (§ 19) der isotropen Linien als Flächenparameter einführen, wenn die Fläche feste mittlere Krümmung hat (1921).

14. **Integralformel von *M. W. Crofton* für Eikörper.** Eine gerichtete Ebene werde festgelegt durch ihre Entfernung p vom Ursprung und die Polarkoordinaten ϑ, φ des Punktes der Einheitskugel

dessen Halbmesser zur positiven Normalen der Ebene gleichsinnig parallel läuft. Dann ist

$$\iiint \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \cdot dp \tag{88}$$

eine Integralinvariante gegenüber Bewegungen. Das Integral, erstreckt über alle Ebenen, die einen Eikörper schneiden, ist gleich dem Integral der mittleren Krümmung

$$\int \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot do, \tag{89}$$

erstreckt über die Oberfläche des Eikörpers. Vgl. die Aufgabe 18 in § 21 und 20 in § 115 und etwa *E. Czuber*, Wiener Berichte II (1884), S. 719—742.

6. Kapitel.

Extreme bei Flächen.

§ 89. Erste Variation der Oberfläche.

Wir wollen berechnen, wie sich die Oberfläche einer krummen Fläche bei einer Formänderung verhält. Es sei $\mathfrak{x}(u, v)$ die Ausgangsfläche. Auf deren Flächennormalen tragen wir die Längen

$$n(u, v) = \varepsilon \bar{n}(u, v)$$

ab und kommen dadurch zur Nachbarfläche

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + n\,\xi,$$

die für $\varepsilon \to 0$ in die Ausgangsfläche hineinrückt. Durch Ableitung folgt

$$\bar{\mathfrak{x}}_u = \mathfrak{x}_u + n_u\,\xi + n\,\xi_u,$$
$$\bar{\mathfrak{x}}_v = \mathfrak{x}_v + n_v\,\xi + n\,\xi_v.$$

Berechnen wir daraus

$$\bar{E} = \bar{\ }_u^{\,2}, \quad \bar{F} = \bar{\mathfrak{x}}_u\,\bar{\mathfrak{x}}_v, \quad \bar{G} = \bar{\mathfrak{x}}_v^{\,2},$$

indem wir Glieder, die in ε von zweiter Ordnung sind, weglassen, erhalten wir nach § 33 (19),

$$\begin{aligned} \bar{E} &= E - 2\,n\,L, \\ \bar{F} &= F - 2\,n\,M, \\ \bar{G} &= G - 2\,n\,N. \end{aligned} \tag{1}$$

Hieraus ergibt sich weiter für

$$\bar{W}^2 = \bar{E}\,\bar{G} - \bar{F}^2$$

der Ausdruck

$$\bar{W}^2 = E\,G - F^2 - 2\,n(E\,N - 2\,F\,M + G\,L)$$

und daraus nach § 35 (30)

$$\bar{W} = W(1 - 2\,n\,H), \tag{2}$$

wo H die mittlere Krümmung der Ausgangsfläche $(\mathfrak{x})$ bedeutet.

Für die Oberfläche von $(\bar{\mathfrak{x}})$ folgt daraus

$$\int\int \bar{W}\,du\,dv = \int\int W\,du\,dv - 2\int\int n\,H\,W\,du\,dv. \tag{3}$$

Somit ist die „erste Variation" der Oberfläche, wenn man an Stelle von n wie üblich δn schreibt

$$\delta O = -\int\int \delta n \cdot 2H \cdot W \, du \, dv$$

oder

$$\boxed{\delta O = -\int \delta n \cdot 2H \cdot do\,.} \tag{4}$$

Darin bedeutet do das Oberflächenelement von (x). Man kommt so durch die Variation der Oberfläche ganz von selbst zum Begriff der mittleren Krümmung H, genau so wie wir durch die Variation der Bogenlänge einer Kurve zu deren Krümmung $1:\varrho$ gelangt sind (§ 22). Damit hat man wieder ein Hilfsmittel zur Hand, um den Begriff der mittleren Krümmung auf allgemeinere Maßbestimmungen zu übertragen, wovon wir später Gebrauch machen werden.

§ 90. Die Minimalflächen als Schiebflächen.

Physikalische Betrachtungen bei der Statik dünner Seifenhäutchen legen das „Problem von *J. Plateau*"[1]) nahe: *Gegeben sei eine geschlossene Kurve. Man soll über diese Kurve eine Fläche mit möglichst kleiner Oberfläche ausspannen.* Haben wir eine Fläche, die diese Forderung erfüllt, so muß in (4) stets $\delta O = 0$ sein für jedes auf der Randlinie verschwindende δn. Daraus folgt, daß auf den gesuchten Flächen $H = 0$ sein muß. $H = 0$ ist die von *J. L. Lagrange* 1760[2]) aufgestellte Differentialgleichung der „Extremalen" unsres Variationsproblems. Man nennt deshalb die Flächen mit identisch verschwindender Krümmung, da sie als Lösungen der Minimumaufgabe *Plateaus* in Betracht kommen, „Minimalflächen". Es gibt wohl kaum eine zweite Flächenfamilie, die wie die Minimalflächen die Aufmerksamkeit der größten Geometer auf sich gezogen hätte. So haben, um nur die wichtigsten Namen zu nennen, *J. L. Lagrange, G. Monge, B. Riemann, K. Weierstraß, H. A. Schwarz, E. Beltrami, S. Lie* und *A. Ribaucour* Untersuchungen über Minimalflächen angestellt.

Man kann die Bestimmung der Minimalflächen, wenn man sich von vornherein auf analytische Flächen beschränkt, sehr leicht auf die Bestimmung der isotropen Kurven (§§ 19, 20) zurückführen und hat darin wohl das glänzendste Beispiel für die Anwendung imaginärer geometrischer Gebilde (wie die isotropen Kurven) auf reelle und physikalisch wichtige Flächen. Führen wir nämlich auf einer krummen Fläche die beiden Scharen isotroper Kurven, für die $ds^2 = 0$ ist, als

---

[1]) *J. Plateau*, Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur. Mémoires de l'Académie royale de Belgique **36** (1866).

[2]) *J. L. Lagrange*. Werke I, S. 335.

Parameterlinien ein[3]), so haben wir $E = 0$, $F \neq 0$, $G = 0$ und für die mittlere Krümmung nach § 35

$$H = \frac{M}{F}. \tag{5}$$

Aus $H = 0$ folgt also $M = 0$ oder $\xi \mathfrak{x}_{uv} = 0$ in der Bezeichnung von § 33 (18). Aus

$$E = \mathfrak{x}_u^2 = 0, \quad G = \mathfrak{x}_v^2 = 0$$

ergibt sich aber durch Ableitung nach v und u, daß $\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uv} = 0$, $\mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uv} = 0$. Somit genügt der Vektor $\mathfrak{x}_{uv}$ gleichzeitig den Bedingungen

$$\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uv} = 0, \quad \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uv} = 0, \quad \xi \mathfrak{x}_{uv} = 0. \tag{6}$$

Da $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, ξ linear unabhängig sind, folgt hieraus das identische Verschwinden von $\mathfrak{x}_{uv}$. Wir haben somit

$$2\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u) + \mathfrak{z}(v), \tag{7}$$

wobei der Faktor 2 ganz unwesentlich ist, und wegen $E = G = 0$

$$\mathfrak{y}'^2 = 0, \quad \mathfrak{z}'^2 = 0. \tag{8}$$

Umgekehrt folgt aus dem Bestehen der Gleichungen (6) und (7) für die Fläche $(\mathfrak{x})$ rückwärts $H = 0$.

Wenn wir daher eine Ausdrucksweise von § 45 hier wieder verwerten, so haben wir gefunden: *Die Minimalflächen sind Schiebflächen, deren Erzeugende isotrope Kurven sind.*

Somit kommt die Integration der Differentialgleichung $H = 0$ zurück auf die Bestimmung der isotropen Kurven, die uns in § 19 schon gelungen ist. Die vorgetragene Deutung der Formeln von *G. Monge* für Minimalflächen[4]) rührt von *S. Lie* (1877)[5]) her.

§ 91. Formeln von *Weierstraß* für Minimalflächen.

Wenn man beachtet, daß auf einer reellen Minimalfläche die isotropen Linien paarweise konjugiert imaginär sind, und wenn man in (7) für $\mathfrak{y}$ die Parameterdarstellung von § 20 einführt, so erhält man für reelle analytische Minimalflächen die integrallose Darstellung

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \Re\, i\left(f - tf' - \frac{1-t^2}{2} f''\right), \\ x_2 &= \Re\left(f - tf' + \frac{1+t^2}{2} f''\right), \\ x_3 &= \Re - i(f' - tf''). \end{aligned}} \tag{9}$$

[3]) Hier wird der Fall übergangen, daß es bloß eine solche Kurvenschar gibt, was nur bei imaginären Torsen möglich ist, deren Erzeugende isotrope Geraden sind.

[4]) Vgl. etwa *G. Monges*, „Application . . .“ von 1850, § XX, S. 211—222. Die ersten Versuche *Monges* über Minimalflächen gehen bis auf 1784 zurück.

[5]) *S. Lie*, Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. Mathem. Annalen **14** (1879), S. 331.

Dabei bedeutet f eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen t und $\Re$ den Realteil der dahinter stehenden analytischen Funktion. Die Ebene entzieht sich dieser Darstellung, obwohl man sie mit zu den Minimalflächen zählen kann. Ferner hat man wie in § 20 von der Funktion f vorauszusetzen, daß ihre dritte Ableitung nicht identisch verschwinde. Die Formeln (9) oder gleichwertige Formeln sind von *K. Weierstraß* 1866 angegeben worden[6]). Aus diesen Formeln folgt, daß zu einer analytischen Funktion eine Minimalfläche gehört. Es besteht also zwischen der seit *Cauchy*, *Riemann* und *Weierstraß* so viel beackerten Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen und der Theorie der Minimalflächen ein inniger Zusammenhang.

Wir wollen feststellen, welche Bedeutung die komplexe Veränderliche t für die Minimalfläche hat. Dazu berechnen wir uns aus der Darstellung (9) von *Weierstraß* den Einheitsvektor ξ der Flächennormalen. Zunächst erhält man durch Ableitung für eine Fortschreitung auf der Fläche

$$\delta x_1 = \Re - i\frac{1-t^2}{2}\lambda,$$

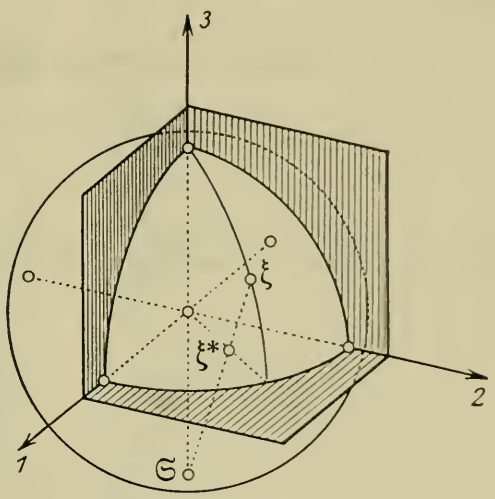
$$\delta x_2 = \Re + \frac{1+t^2}{2}\lambda,$$

$$\delta x_3 = \Re + it\lambda,$$

worin

$$\lambda = f'''(t)\,\delta t$$

bedeutet. Daraus erhält man nach willkürlicher Wahl eines Vorzeichens folgenden Vektor ξ, der für alle λ auf δx senkrecht steht:



Figur 34.

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2r}{1+(r^2+s^2)}, \\ \xi_2 &= \frac{2s}{1+(r^2+s^2)}, \\ \xi_3 &= \frac{1-(r^2+s^2)}{1+(r^2+s^2)}, \end{aligned}\right\} \quad t = r + is. \tag{10}$$

Durch Angabe der komplexen Zahl $t = r + is$ (r, s reell!) ist also der Normalenvektor ξ festgelegt und umgekehrt. Dieser Zu-

[6]) *K. Weierstraß*, Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist. Werke III, S. 39—52; bes. S. 46 (35).

sammenhang zwischen den Punkten ξ der Einheitskugel $\xi^2 = 1$ und den t-Werten wird durch „stereographische Projektion“ vermittelt. Verbindet man jeden Punkt ξ mit dem „Südpol“ $(0, 0, -1)$ der Einheitskugel, so wird die „Äquatorebene“ $x_3 = 0$ von diesem Strahl im Punkte ξ^* mit den Koordinaten $r, s, 0$ geschnitten (vgl. Fig. 34). Faßt man also die Ebene $x_3 = 0$ als *Gauß*ische Ebene der komplexen Zahlen $t = r + is = x_1 + ix_2$ auf, und ordnet man dieselben t-Werte den Punkten der Einheitskugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ zu, die aus den Punkten $(r, s, 0)$ durch Projektion aus $(0, 0, -1)$ entstehen, so hat man die Zahlenkugel *Riemanns* vor sich. Für unsre Minimalfläche bedeutet also t *Riemanns* komplexe Veränderliche für das *Gauß*ische sphärische Abbild der Fläche durch parallele Normalen.

Nach *Weierstraß* kann man unschwer einsehen, daß man in der Darstellung (9) alle algebraischen Minimalflächen erhält, wenn man für $f(t)$ eine algebraische Funktion einsetzt.

§ 92. Formeln von *Study* für Minimalflächen.

Gehen wir von der Darstellung (7) einer im allgemeinen imaginären Minimalfläche $(\mathfrak{x})$ durch zwei isotrope Kurven $(\mathfrak{y})$ und $(\mathfrak{z})$ aus:

$$2\,\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u) + \mathfrak{z}(v); \quad \mathfrak{y}'^2 = \mathfrak{z}'^2 = 0, \tag{11}$$

so liegt nach § 19 der Gedanke nahe, mit *Study* die beliebigen Parameter u, v durch die *natürlichen* Parameter p, q zu ersetzen, sodaß

$$\begin{gathered} 2\,\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(p) + \mathfrak{z}(q), \\ \mathfrak{y}' \times \mathfrak{y}'' = -\,\mathfrak{y}', \quad \mathfrak{y}''^2 = -1; \\ \mathfrak{z}' \times \mathfrak{z}'' = -\,\mathfrak{z}', \quad \mathfrak{z}''^2 = -1 \end{gathered} \tag{12}$$

wird. Es ist

$$\xi = \frac{\mathfrak{x}_p \times \mathfrak{x}_q}{\sqrt{(\mathfrak{x}_p \times \mathfrak{x}_q)^2}} = i\,\frac{\mathfrak{y}' \times \mathfrak{z}'}{\mathfrak{y}' \cdot \mathfrak{z}'} \tag{13}$$

bei willkürlicher Entscheidung über das Vorzeichen. Aus $\xi^2 = 1$ folgt $\xi\,\xi_p = 0$ oder

$$\xi_p = a\,\mathfrak{y}' + b\,\mathfrak{z}'. \tag{14}$$

Andrerseits ist $\xi\,\mathfrak{z}' = 0$. Durch Ableitung nach p folgt daraus $\xi_p\,\mathfrak{z}' = 0$. Deshalb ist nach (14)

$$\xi_p\,\mathfrak{z}' = a\,\mathfrak{y}'\,\mathfrak{z}' = 0, \quad \text{also } a = 0.$$

Ebenso folgt aus $\xi\,\mathfrak{y}' = 0$ durch Ableitung und aus (14)

$$\xi_p\,\mathfrak{y}' = -\,\xi\,\mathfrak{y}'' = b \cdot \mathfrak{y}'\,\mathfrak{z}'.$$

Somit ist

$$b = -\,\frac{\xi\,\mathfrak{y}''}{\mathfrak{y}'\,\mathfrak{z}'} = i\,\frac{(\mathfrak{y}'\,\mathfrak{y}''\,\mathfrak{z}')}{(\mathfrak{y}'\,\mathfrak{z}')^2}$$

oder endlich nach (12)

$$b = -i\frac{1}{\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'},$$

$$\xi_p = -i\frac{\mathfrak{z}'}{\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'}. \tag{15}$$

Entsprechend erhält man

$$\xi_q = +i\frac{\mathfrak{y}'}{\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'}. \tag{15*}$$

Neben den Parametern p, q auf der Minimalfläche sollen noch zwei weitere Parameterpaare verwendet werden:

$$\begin{cases} p = u + iv = \dfrac{\alpha + i\beta}{1+i}, \\ q = u - iv = \dfrac{\alpha - i\beta}{1-i}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{p+q}{2} = +\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \\ v = \dfrac{p-q}{2i} = -\dfrac{\alpha-\beta}{2}; \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \alpha = u - v = \dfrac{p - iq}{1-i}, \\ \beta = u + v = \dfrac{p+iq}{1+i}. \end{cases}$$

Setzen wir für den Augenblick

$$\frac{2}{\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'} = 2\xi_p\xi_q = \lambda,$$

so wird

$$d\mathfrak{x} = +\tfrac{1}{2}(\mathfrak{y}'\,dp + \mathfrak{z}'\,dq),$$

$$d\xi = -\frac{i\lambda}{2}(\mathfrak{z}'\,dp - \mathfrak{y}'\,dq),$$

und daraus (§§ 33, 41)

$$I = +d\mathfrak{x}\cdot d\mathfrak{x} = \frac{dp\,dq}{\lambda} = \frac{du^2+dv^2}{\lambda} = \frac{d\alpha^2+d\beta^2}{2\lambda},$$

$$II = -d\mathfrak{x}\cdot d\xi = \frac{i}{2}(dp^2 - dq^2) = -2\,du\,dv = \frac{1}{2}(d\alpha^2 - d\beta^2),$$

$$III = +d\xi\cdot d\xi = \lambda\,dp\,dq = \lambda(du^2+dv^2) = \frac{\lambda}{2}(d\alpha^2+d\beta^2).$$

Nach § 41 war

$$KI - 2HII + III = 0;$$

also ist hier wegen $H = 0$

$$KI + III = 0.$$

Somit folgt für das Krümmungsmaß unsrer Minimalfläche

$$K = -\lambda^2 = -\left(\frac{2}{\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'}\right)^2. \tag{17}$$

Beachten wir, daß $II = 0$ die Differentialgleichung der Asymptotenlinien ist, so ergibt sich, daß $u, v =$ konst. oder $p \pm q =$ konst. die *Asymptotenlinien* unsrer Fläche sind. Führen wir andrerseits $\alpha, \beta =$ konst. als Parameterlinien ein, so fehlt in I und II das gemischte Glied; also sind diese Kurven $p \pm iq =$ konst. nach § 37 ($F = 0$, $M = 0$) die *Krümmungslinien* unsrer Fläche. Hat man also erst die natürlichen Parameter p, q ermittelt, so sind damit die Krümmungslinien und Asymptotenlinien gleichzeitig aufgefunden.

Die Formeln dieses Abschnitts hat *E. Study* in einer Vorlesung 1909 angegeben, in der er die Theorie der Minimalflächen neu begründet hat[7]).

Setzt man wie in § 79 die Entfernung P der Tangentenebene vom Ursprung als positiv homogene Funktion eines (nicht normierten) Normalenvektors der Fläche an, so lautet nach § 78 (35) die Differentialgleichung der Minimalflächen

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi_3^2} = 0 .$$

Hieraus folgt, daß die Theorie der Minimalflächen aufs innigste mit den Kugelflächenfunktionen zusammenhängt. Darauf soll aber hier nicht eingegangen werden.

§ 93. Eine allgemeine Formel von *Gauß* für die erste Variation der Oberfläche.

Wir wollen die Formel von § 89 für δO noch einmal unter der allgemeineren Annahme herleiten, daß die Verrückung $\delta \mathfrak{x}$ des Flächenpunkts in beliebiger Richtung erfolgt. Legen wir beispielsweise die Krümmungslinien als Parameterkurven auf der Ausgangsfläche zugrunde, so lauten die Ableitungsgleichungen nach § 48 (135), (136):

$$\mathfrak{x}_{uu} = + \frac{E_u}{2E} \mathfrak{x}_u - \frac{E_v}{2G} \mathfrak{x}_v + L \xi ,$$

$$\mathfrak{x}_{uv} = + \frac{E_v}{2E} \mathfrak{x}_u + \frac{G_u}{2G} \mathfrak{x}_v + * ,$$

$$\mathfrak{x}_{vv} = - \frac{G_u}{2E} \mathfrak{x}_u + \frac{G_v}{2G} \mathfrak{x}_v + N \xi ,$$

und (§ 46):

$$\xi_u = - \frac{L}{E} \mathfrak{x}_u , \quad \xi_v = - \frac{N}{G} \mathfrak{x}_v .$$

Wir gehen nun von unsrer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ zu einer Nachbarfläche

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}(u, v) + \delta \mathfrak{x}(u, v)$$

---

[7]) Vgl. die Angaben am Schlusse der Abhandlung *E. Study*, Über einige imaginäre Minimalflächen. Leipziger Akademieberichte **63** (1911), S. 14—26.

über, indem wir setzen:

$$\delta \mathfrak{x} = p\,\mathfrak{x}_u + q\,\mathfrak{x}_v + n\,\mathfrak{\xi},$$

$$p = \varepsilon\,\bar{p}(u,v), \quad q = \varepsilon\,\bar{q}(u,v), \quad n = \varepsilon\,\bar{n}(u,v); \quad \varepsilon \to 0. \tag{18}$$

Wir kommen also durch Spezialisierung $p = q = 0$ auf den in § 89 behandelten Sonderfall zurück. Hier ergibt sich durch Ableitung unter Beachtung der Ableitungsformeln

$$\bar{\mathfrak{x}}_u = \Big(1 + p_u + \frac{E_u p + E_v q - 2Ln}{2E}\Big)\mathfrak{x}_u + (*)\,\mathfrak{x}_v + (*)\,\mathfrak{\xi},$$

$$\bar{\mathfrak{x}}_v = (*)\,\mathfrak{x}_u + \Big(1 + q_v + \frac{G_u p + G_v q - 2Nn}{2G}\Big)\mathfrak{x}_v + (*)\,\mathfrak{\xi}.$$

Dabei deuten die Symbole (*) Ausdrücke an, die ε in erster Ordnung enthalten. Berücksichtigt man nur die in ε höchstens linearen Glieder, so folgt

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{x}}_u \times \bar{\mathfrak{x}}_v = \Big(1 + p_u + q_v + \dfrac{E_u p + E_v q - 2Ln}{2E} \\ \qquad + \dfrac{G_u p + G_v q - 2Nn}{2G}\Big)\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v + (*)\,\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{\xi} + (*)\,\mathfrak{\xi} \times \mathfrak{x}_u. \end{cases} \tag{19}$$

Da die Parameterlinien Krümmungslinien sind, so sind die Vektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{\xi}$ und daher auch die Vektoren $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{\xi}$, $\mathfrak{\xi} \times \mathfrak{x}_u$ paarweise orthogonal. Somit lautet das innere Quadrat von (19), wenn wir wieder die in ε quadratischen Glieder weglassen:

$$(\bar{\mathfrak{x}}_u \times \bar{\mathfrak{x}}_v)^2 = \Phi^2 (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2 = \Phi^2 EG,$$

wo Φ den Koeffizienten von $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ in (19) bedeutet. Somit wird die Oberfläche von $\bar{\mathfrak{x}}(u,v)$

$$\bar{O} = \int \sqrt{(\bar{\mathfrak{x}}_u \times \bar{\mathfrak{x}}_v)^2}\,du\,dv = \int \Phi \sqrt{EG}\,du\,dv = O + \delta O.$$

Darin ist

$$\delta O = \iint \Big\{\frac{\partial}{\partial u}(p\sqrt{EG}) + \frac{\partial}{\partial v}(q\sqrt{EG})\Big\}\,du\,dv - \iint \Big(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\Big) n \sqrt{EG}\,du\,dv.$$

Das zweite Glied ist das uns schon von § 89 bekannte

$$-2\int H n\,do,$$

während man das erste Doppelintegral durch Integration nach Teilen („Formel von *Green*“) in ein längs des Randes erstrecktes Kurvenintegral umformen kann:

$$\oint (p\,dv - q\,du)\sqrt{EG}.$$

Nun folgt aber aus (18) wegen $(\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{\xi}) = \sqrt{EG}$

$$p\sqrt{EG} = (\delta\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{\xi}),$$

$$q\sqrt{EG} = (\mathfrak{x}_u, \delta\mathfrak{x}, \mathfrak{\xi}).$$

Das gibt eingesetzt in das Randintegral

$$\oint (\delta \mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi),$$

wenn $d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv$ das vektorielle Linienelement der Randkurve ist.

Somit erhalten wir schließlich für δO die gewünschte allgemeine Formel

$$\delta O = \oint (\delta \mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi) - 2 \int H n \, do,$$

oder, wenn wir auch noch n durch die Verrückung $\delta \mathfrak{x}$ ausdrücken:

$$\boxed{\delta O = \oint (\delta \mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi) - \iint 2H \cdot (\delta \mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v) \, du \, dv.} \tag{20}$$

Für das Randintegral gilt darin die Zeichenregel: Stellt man sich auf die Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$, so daß der Vektor ξ nach oben weist, so ist das Randintegral nach links herum zu nehmen, wenn wir voraussetzen, daß die x_2-Achse links von der x_1-Achse liegt.

Die Formel (20) für δO ist 1829 von *Gauß* angegeben worden[8]).

§ 94. Eine Formel von *Schwarz* für die Oberfläche einer Minimalfläche.

Wir wollen die Formel von *Gauß* für δO dazu verwenden, um eine auf Untersuchungen von *Riemann* zurückgehende, von *H. A. Schwarz* 1874 angegebene Formel herzuleiten[9]), die die Oberfläche eines Minimalflächenstücks durch ein längs der Randkurve erstrecktes Linienintegral ausdrückt.

Wir betrachten eine Schar ähnlicher und bezüglich des Ursprungs ähnlich gelegener derartiger Flächenstücke

$$\mathfrak{x}^*(u, v, \lambda) = \lambda \mathfrak{x}(u, v), \qquad 0 < \lambda \leqq 1.$$

Setzen wir

$$\delta \mathfrak{x}^* = \delta \lambda \cdot \mathfrak{x},$$

so ist nach der Formel (20) wegen $H = 0$ und $\xi^* = \xi$

$$\delta O^* = \delta \lambda \oint (\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}^*, \xi) = \lambda \delta \lambda \oint (\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi).$$

Hieraus ergibt sich wegen $O^*(0) = 0$ durch Integration nach λ zwischen den Grenzen Null und Eins die gewünschte Formel

$$\boxed{O = \tfrac{1}{2} \oint (\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi).} \tag{21}$$

Aus (21) folgt z. B., daß man die Vektoren ξ längs des Randes sicher nicht beliebig vorschreiben darf. Denn wegen seiner Bedeutung

---

[8]) *C. F. Gauß*, Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii. Werke **5**, S. 29—77, bes. S. 65.

[9]) *H. A. Schwarz*, Mathematische Abhandlungen I, S. 178.

muß das Integral O unabhängig von der Wahl des Ursprungs sein, d. h. es muß

$$\int (\mathfrak{x} + \mathfrak{v}, d\mathfrak{x}, \xi)$$

unabhängig von der Wahl des (längs der Kurve festen) Vektors $\mathfrak{v}$ sein. Das ergibt die Bedingung

$$\int \xi \times d\mathfrak{x} = -\int \mathfrak{x} \times d\xi = 0. \tag{22}$$

Das Verschwinden dieses Integrals für jede geschlossene, ein einfach zusammenhängendes Flächenstück begrenzende Flächenkurve ist aber für die Minimalflächen kennzeichnend. Wir haben nämlich

$$\int \xi \times d\mathfrak{x} = \int \{(\xi \times \mathfrak{x}_u)\, du + (\xi \times \mathfrak{x}_v)\, dv\}$$

und finden als Bedingung, daß der Integrand ein vollständiges Differential ist

$$\frac{\partial}{\partial v}(\xi \times \mathfrak{x}_u) - \frac{\partial}{\partial u}(\xi \times \mathfrak{x}_v) = 0$$

oder

$$\xi_v \times \mathfrak{x}_u - \xi_u \times \mathfrak{x}_v = 0. \tag{23}$$

Mittels der Ableitungsformeln *Weingartens* (§ 46) ergibt sich daraus die Behauptung $H = 0$. Im übrigen kann man $H = 0$ aus (22) noch einfacher mittels der Formel (20) von *Gauß* herleiten.

Es sei nebenbei erwähnt, daß man die Beziehung (22) auch mechanisch deuten kann. Denkt man sich die Minimalfläche durch eine dünne Haut verwirklicht und in dieser einen solchen Spannungszustand hergestellt, daß auf das Linienelement $d\mathfrak{x}$ der Spannungsvektor $d\xi$ wirkt, so ist wegen

$$\int d\xi = 0, \qquad \int \mathfrak{x} \times d\xi = 0$$

die Haut im Gleichgewicht.

Statt die Minimalfläche zu verwirklichen, kann man ebenso gut die Einheitskugel (ξ) oder ein Stück von ihr durch eine Haut ersetzen und im Linienelement $d\xi$ die Spannung $d\mathfrak{x}$ herstellen. Wegen

$$\int d\mathfrak{x} = 0, \qquad \int \xi \times d\mathfrak{x} = 0$$

herrscht dann wiederum Gleichgewicht.

Die Flächen $(\mathfrak{x})$ und (ξ) stehen in der Beziehung, daß man die eine als „reziproken Kräfteplan" zu den Spannungen in der andern ansehen kann[10]).

§ 95. Bestimmung einer Minimalfläche durch einen Streifen.

(Aufgabe von *E. G. Björling*.)

Nach dem letzten Ergebnis ist das auf einer Minimalfläche erstreckte Integral

$$\int \xi \times d\mathfrak{x}$$

[10]) Vgl. *W. Blaschke*, Reziproke Kräftepläne zu den Spannungen in einer biegsamen Haut. Congress Cambridge 1912, 2, S. 291—297.

vom Integrationsweg unabhängig [11]). Wir wollen dieses Integral auf eine andre Form bringen, indem wir die Parameterdarstellung (12) der Minimalfläche zugrunde legen. Wir setzen also

$$\xi = i\frac{\mathfrak{y}' \times \mathfrak{z}'}{\mathfrak{y}' \cdot \mathfrak{z}'}, \qquad 2d\mathfrak{x} = \mathfrak{y}'dp + \mathfrak{z}'dq$$

und finden nach der Rechenregel § 3 (43) oder

$$(\mathfrak{p} \times \mathfrak{q}) \times \mathfrak{r} = (\mathfrak{p}\mathfrak{r})\mathfrak{q} - (\mathfrak{q}\mathfrak{r})\mathfrak{p} \tag{24}$$

das Ergebnis

$$2\xi \times d\mathfrak{x} = -i(d\mathfrak{y} - d\mathfrak{z}). \tag{25}$$

Aus den Gleichungen

$$d\mathfrak{y} + d\mathfrak{z} = 2d\mathfrak{x}$$
$$d\mathfrak{y} - d\mathfrak{z} = +2i\xi \times d\mathfrak{x}$$

folgen die 1874 von *H. A. Schwarz* [12]) gefundenen Formeln

$$\begin{aligned} d\mathfrak{y} &= d\mathfrak{x} + i(\xi \times d\mathfrak{x}), \\ d\mathfrak{z} &= d\mathfrak{x} - i(\xi \times d\mathfrak{x}) \end{aligned} \tag{26}_1$$

oder

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{y} &= \mathfrak{x} + i\int \xi \times d\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{z} &= \mathfrak{x} - i\int \xi \times d\mathfrak{x}. \end{aligned}} \tag{26}_2$$

Hierin ist in übersichtlichster Art die Lösung einer 1844 durch den Professor an der Universität in Upsala *E. G. Björling* behandelten Aufgabe enthalten: *Alle Minimalflächen durch einen vorgeschriebenen „Streifen" zu ermitteln.* D. h. die Minimalfläche soll so bestimmt werden, daß sie durch eine vorgegebene (offene) Kurve hindurchgeht und in den Punkten der Kurve gegebene Tangentenebenen besitzt. Die Kurve sei $\mathfrak{x}(t)$, die Tangentenebene werde durch den Vektor $\xi(t)$ der Flächennormalen bestimmt ($\xi^2 = 1$, $\xi\mathfrak{x}' = 0$). Dann kann man die Integrale (26) längs der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ erstrecken. Man findet so die isotropen Kurven $\mathfrak{y}(t)$ und $\mathfrak{z}(t)$, durch die die gesuchte Minimalfläche durch den Streifen eindeutig bestimmt ist. Eine Ausnahme könnte nur dann eintreten, wenn längs $\mathfrak{x}(t)$ entweder

$$\mathfrak{x}' - i\xi \times \mathfrak{x}' = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{x}' + i\xi \times \mathfrak{x}' = 0$$

wäre. Da der Vektor $\xi \times \mathfrak{x}'$ auf $\mathfrak{x}'$ senkrecht steht, kann er nur dann die Richtung $\mathfrak{x}'$ haben, wenn die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ isotrop ist ($\mathfrak{x}'^2 = 0$). Somit ergibt sich:

Durch einen Streifen (dessen Kurve nicht isotrop ist, also insbesondere durch jeden reellen Streifen) geht eine und nur eine Minimalfläche hindurch, die durch die Formeln von Schwarz (26) *bestimmt ist.*

---

[11]) Es ist das ein Sonderfall eines Satzes von Fräulein *E. Noether* über invariante Variationsprobleme, Göttinger Nachrichten 1918, S. 235—257.

[12]) *H. A. Schwarz,* Mathematische Abhandlungen I, S. 179, S. 181.

Schwarz hat bemerkt[12]), daß hierin die besonderen Ergebnisse enthalten sind:

Enthält eine Minimalfläche eine (nicht isotrope) gerade Linie, so führt eine Drehung durch den Winkel π um diese Gerade die Minimalfläche in sich selbst über.

Liegt auf einer Minimalfläche eine (etwa reelle) ebene geodätische Linie, so ist die Fläche zur Ebene dieser Kurve symmetrisch.

Entsprechend beweist man nach *Study*[13]): *Ein konischer Doppelpunkt einer Minimalfläche ist stets Mittelpunkt der Fläche.*

§ 96. Ein Satz von *T. Carleman* über den Kreis.

Wir haben in § 26 und § 27 die isoperimetrische Haupteigenschaft des Kreises bewiesen, unter „allen" geschlossenen, ebenen Kurven gegebenen Umfangs den größten Flächeninhalt zu umgrenzen. Diese Tatsache läßt sich, wie *T. Carleman* gefunden hat[14]), in bemerkenswerter Art auf die räumliche Geometrie übertragen. Hier soll das Ergebnis *Carleman*s unter engeren Voraussetzungen, dafür aber auf sehr anschauliche Art hergeleitet werden.

Spannt man über eine geschlossene räumliche Kurve, die man sich durch einen Draht verwirklicht denken möge, ein dünnes Flüssigkeitshäutchen — etwa einer Seifenlösung — aus, so ist dessen Gleichgewichtsfigur die Minimalfläche, die von allen über die Kurve ausgespannten Flächen die kleinste Oberfläche besitzt. Der mathematische Nachweis für das Vorhandensein einer Lösung dieses „Problems von *Plateau*" ist unter recht allgemeinen Voraussetzungen über den Rand von *S. Bernstein*[15]) erbracht worden.

Gehen wir von einer geschlossenen Raumkurve $\mathfrak{C}$ vom Umfang L aus, und nehmen wir an, es gehe durch $\mathfrak{C}$ eine Fläche $\mathfrak{M}$ kleinster Oberfläche. $\mathfrak{M}$ ist dann eine Minimalfläche, ihre Oberfläche sei O. Es soll nun gezeigt werden: Zwischen L und O besteht die Beziehung

$$L^2 - 4\pi O \geqq 0, \tag{27}$$

und es ist nur dann $L^2 - 4\pi O = 0$, wenn $\mathfrak{C}$ ein Kreis ist.

Beschränkt man sich auf *ebene* Kurven $\mathfrak{C}$, so erhält man den alten isoperimetrischen Satz (§ 26) als Sonderfall.

Zum Nachweis wählen wir auf $\mathfrak{C}$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{z}$ aus und bestimmen die Kegelfläche $\mathfrak{K}$, die $\mathfrak{z}$ zur Spitze hat und durch $\mathfrak{C}$

---

[13]) *E. Study*, Leipziger Berichte **63** (1911), S. 23, 26.

[14]) *T. Carleman*, Zur Theorie der Minimalflächen. Math. Zeitschr. **9** (1921), S. 154—160.

[15]) *S. Bernstein*, Mathem. Annalen **69** (1910), S. 126, 127.

hindurchgeht. Wickelt man $\mathfrak{K}$ in die Ebene ab, so geht $\mathfrak{C}$ in eine geschlossene ebene Kurve $\mathfrak{C}^*$ über, deren Flächeninhalt F gleich der Oberfläche des Kegels $\mathfrak{K}$, also wegen der Kleinsteigenschaft der Minimalfläche $\mathfrak{M}$ sicher $\geqq O$ ist, und deren Umfang L ist. Nach § 27 gilt

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0 \tag{28}$$

und wegen

$$F \geqq O \tag{29}$$

folgt die zu beweisende Behauptung

$$L^2 - 4\pi O \geqq L^2 - 4\pi F \geqq 0 .$$

Es bleibt nur noch festzustellen, wann in (27) die Gleichheit gilt. Dazu muß sowohl in (28) wie in (29) das Gleichheitszeichen richtig sein. Ist $F = O$, so muß $\mathfrak{K}$ eine Minimalfläche sein. Da nun die Ebene als einzige (reelle!) Fläche gleichzeitig Torse und Minimalfläche ist, so ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{M}$ eine Ebene. Für eine ebene Kurve $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C}$ gilt aber nach § 27 nur dann $L^2 = 4\pi F$, wenn $\mathfrak{C}$ ein Kreis ist. Damit ist auch noch der Einzigkeitsbeweis erbracht.

Es sei noch einmal der Unterschied zwischen den „Randwertaufgaben“ von *Björling* (§ 95) und *Plateau* (§ 90) hervorgehoben. Bei *Björling* soll durch ein *offenes* Kurvenstück eine Minimalfläche gelegt werden, die längs dieser Kurve gegebene Tangentenebenen hat. Bei *Plateau* hingegen handelt es sich um das mathematisch ungleich schwierigere Problem, die Minimalflächen durch eine *geschlossene* Kurve zu bestimmen, so daß die Kurve ein einfach zusammenhängendes Stück der Minimalfläche berandet. Legt man mittels der Formeln von *Schwarz* (§ 95) durch einen geschlossenen Streifen die Minimalfläche, so wird der Streifen in der Regel kein reguläres, einfach zusammenhängendes Stück ihrer Fläche begrenzen.

§ 97. Isoperimetrie der Kugel.

Das einfachste Gegenstück zur isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises in der Ebene ist in der räumlichen Geometrie nicht der im letzten Abschnitt auseinandergesetzte Satz *Carlemans*, sondern die entsprechende *Eigenschaft der Kugel, unter „allen“ geschlossenen Flächen mit gegebener Oberfläche den größten Rauminhalt zu umgrenzen*, oder, was auf dasselbe hinausläuft, bei gegebenem Rauminhalt kleinste Oberfläche zu besitzen.

Es sei zunächst darauf hingewiesen, wie man die Differentialgleichung des Problems aufstellt. Für die Variation der Oberfläche hatten wir in § 89 die Formel

$$\delta O = -2\int \delta n \cdot H \cdot do$$

gefunden. Für die Variation des Rauminhalts ergibt sich bei geeigneter Vorzeichenbestimmung offenbar

$$\delta V = -\int \delta n \cdot do .$$

Soll nun aus $\delta O = 0$ folgen $\delta V = 0$, so muß sein

$$H = \text{konst.},$$

was man genau so wie den entsprechenden Satz in der Ebene begründet (§ 25). Durch $H = \text{konst.}$ sind aber (wenigstens unter den Eiflächen) nach *Liebmann* (§ 76) die Kugeln gekennzeichnet. Somit kommen als Lösungen der isoperimetrischen Aufgabe unter Eiflächen nur die Kugeln in Betracht.

Hierfür soll nun noch ein zweiter, weit einfacherer Beweis erbracht werden, den man dem phantasievollen Geometer *J. Steiner* (1796—1863), einem der Mitbegründer der projektiven Geometrie, verdankt. Übrigens war *Jakob Steiner* (trotz seines östlich klingenden Namens) ein urwüchsiger Schweizer Bauernsohn. Das wichtigste Hilfsmittel des Beweises ist *Steiners „Symmetrisierung"*, ein Verfahren, das gestattet, aus jedem Eikörper einen neuen, inhaltsgleichen herzuleiten, der eine Symmetrieebene und in der Regel kleinere Oberfläche besitzt.

Dazu denken wir uns den Ausgangseikörper $\mathfrak{K}$ aus parallelen, „vertikalen" Stäbchen aufgebaut. Die vertikale Richtung sei etwa die x_3-Richtung eines rechtwinkligen Achsenkreuzes. Wir verschieben jedes Stäbchen auf seiner Geraden so lange, bis sein Mittelpunkt in die Ebene $x_3 = 0$ zu liegen kommt. Die so verschobenen Stäbchen erfüllen dann eine zu $x_3 = 0$ symmetrische Punktmenge $\mathfrak{K}^*$. Es ist zunächst zu zeigen, daß aus der Konvexität von $\mathfrak{K}$ die von $\mathfrak{K}^*$ folgt, daß also auch der „symmetrisierte" Körper $\mathfrak{K}^*$ ein Eikörper ist. Dazu ist nur zu zeigen, daß mit zwei Punkten $\mathfrak{p}_1^*$, $\mathfrak{q}_1^*$ immer auch deren Verbindungsstrecke in $\mathfrak{K}^*$ liegt. Es seien $\mathfrak{p}_2^*$, $\mathfrak{q}_2^*$ die Spiegelpunkte von $\mathfrak{p}_1^*$, $\mathfrak{q}_1^*$ an $x_3 = 0$ und $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$; $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_2$ die vier Punkte in $\mathfrak{K}$ durch deren Vertikalverschiebung $\mathfrak{p}_1^*$, $\mathfrak{q}_1^*$; $\mathfrak{p}_2^*$, $\mathfrak{q}_2^*$ entstanden sind. Da $\mathfrak{K}$ ein Eikörper ist, enthält $\mathfrak{K}$ die konvexe Viereckfläche mit den Ecken $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$; $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_2$. Infolge seiner Entstehung enthält demnach auch $\mathfrak{K}^*$ die aus dieser Viereckfläche durch die Symmetrisierung entstehende mit den Ecken $\mathfrak{p}_1^*$, $\mathfrak{q}_1^*$; $\mathfrak{p}_2^*$, $\mathfrak{q}_2^*$, also auch insbesondere die Strecke $\mathfrak{p}_1^* \mathfrak{q}_1^*$, w. z. b. w.

Daß $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$ inhaltsgleich sind, folgt aus dem sogenannten Prinzip von *B. Cavalieri* (1598—1648). Man zeigt es auch folgendermaßen. Bedeutet $f(x_1, x_2)$ $(\geqq 0)$ die Länge der vertikalen Strecke, in der $\mathfrak{K}$ durch die Gerade geschnitten wird, deren Punkte die vorgeschriebenen x_1, x_2-Koordinaten haben, so gilt für den Rauminhalt von $\mathfrak{K}$ die Formel

$$V = \int\int f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 ,$$

und, da f für $\mathfrak{K}^*$ dasselbe ist, gilt diese Gleichung auch für den Inhalt von $\mathfrak{K}^*$.

Bevor wir zur Verkleinerung der Oberfläche übergehen, soll gezeigt werden: Ist die den Eikörper $\mathfrak{K}$ begrenzende Eifläche $\mathfrak{F}$ durchweg regulär und analytisch, so hat auch die Begrenzung $\mathfrak{F}^*$ von $\mathfrak{K}^*$ diese Eigenschaft. Eine Singularität könnte nämlich höchstens dort entstehen, wo die Tangentenebenen von $\mathfrak{F}$ vertikal, d. h. parallel x_3 sind. Für eine solche Stelle läßt sich durch geeignete Achsenwahl die Darstellung

$$x_1 = a x_2^2 + 2 b x_2 x_3 + c x_3^2 + \dots$$

herbeiführen mit a, c, $ac - b^2 > 0$. Für die symmetrisierte Eifläche $\mathfrak{F}^*$ ergibt sich dann an der entsprechenden Stelle die Entwicklung

$$x_1 = \frac{ac - b^2}{c} x_2^2 + c x_3^2 + \dots,$$

woraus die Regularität von $\mathfrak{F}^*$ einleuchtet.

§ 98. Wirkung von *Steiners* Symmetrisierung auf die Oberfläche.

Zum Beweis für die Oberflächenverringerung zerschneiden wir unsre Eifläche $\mathfrak{F}$ durch die Kurve der vertikalen Tangentenebenen in zwei Teile, in den „oberen“ Teil $\overline{\mathfrak{F}}$ und den unteren $\underline{\mathfrak{F}}$. Beide beziehen wir auf Parameter u, v, so daß

$$\bar{x}_1(u, v) = \underline{x}_1(u, v) = x_1(u, v),$$
$$\bar{x}_2(u, v) = \underline{x}_2(u, v) = x_2(u, v)$$

wird. Wir setzen ferner

$$x_3(u, v; t) = \frac{1+t}{2} \bar{x}_3(u, v) - \frac{1-t}{2} \underline{x}_3(u, v)$$

und

$$\Phi(t) = \iint \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv;$$

$$A = \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial u} = \frac{1+t}{2}\bar{A} - \frac{1-t}{2}\underline{A},$$

$$B = \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial x_3}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{1+t}{2}\bar{B} - \frac{1-t}{2}\underline{B},$$

$$C = \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial u}.$$

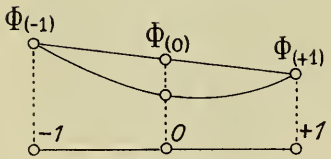


Fig. 35.

Dann drückt sich unsere Behauptung über die Verkleinerung der Oberfläche durch Symmetrisierung durch die Formel aus

(30) $\Phi(+1) - 2\Phi(0) + \Phi(-1) \geqq 0$.

In der t, Φ-Ebene bedeutet (30) (vgl. Fig. 35), daß der Mittelpunktder beiden Punkte -1, $\Phi(-1)$ und $+1$, $\Phi(+1)$ über der Stelle 0, $\Phi(0)$ liegt, was durch die Konvexitätsbedingung $\Phi''(t) \geqq 0$, für $-1 < t < +1$ sichergestellt wäre.

Man erhält

$$\Phi''(t) = \iint \frac{\{A(B+\bar{B}) - \bar{B}(A+\bar{A})\}^2 + \{(A+\bar{A})^2 + (B+\bar{B})^2\} C^2}{4\{A^2+B^2+C^2\}^{\frac{3}{2}}}\, du\, dv .$$

Daraus ist aber $\Phi''(t) \geqq 0$ ersichtlich und somit die Behauptung bewiesen, daß die Oberfläche beim Symmetrisieren im allgemeinen abnimmt.

Es bleibt noch die Frage zu erledigen: wann bleibt die Oberfläche beim Symmetrisieren erhalten? Dazu ist notwendig, daß $\Phi''(t) = 0$ für alle $-1 < t < +1$ und daher

$$A + \bar{A} = B + \bar{B} = 0 , \tag{31}$$

da C im Innern des Integrationsbereichs $\neq 0$ ist ($\xi_3 \neq 0$). Aus (31) und

$$\bar{C} = \underline{C} = C$$

ergibt sich aber, daß der obere und untere Flächenteil zu einer Ebene $x_3 =$ konst. symmetrisch sind[16]).

Wir finden also zusammenfassend: *Steiners Symmetrisierung verwandelt jede reguläre Eifläche wieder in eine reguläre Eifläche, die zur ersten inhaltsgleich und in der Regel kleiner an Oberfläche ist. Die Oberfläche bleibt nur in dem trivialen Fall ungeändert, daß schon die ursprüngliche Fläche senkrecht zur Symmetrisierungsrichtung eine Symmetrieebene hatte.*

Die einzige Eifläche, bei der dieser Ausnahmefall für jede Richtung zutrifft, ist die Kugel. Denn diese Eifläche hat zunächst sicher drei paarweis senkrechte Symmetrieebenen, also deren Schnitt zum Mittelpunkt $\mathfrak{o}$. Dann muß jede Ebene durch $\mathfrak{o}$ Symmetrieebene sein. Somit wird die Eifläche alle Geraden durch $\mathfrak{o}$ senkrecht durchschneiden, was wirklich nur bei der Kugel der Fall ist.

Damit ist aber gezeigt: Jede nichtkugelige Eifläche kann man durch Symmetrisierung in eine inhaltsgleiche mit kleinerer Oberfläche verwandeln. *Falls daher die isoperimetrische Grundaufgabe der räumlichen Geometrie unter den regulären Eiflächen überhaupt eine Lösung hat, so kann diese Lösung nur die Kugel sein.*

Das ist der Gedanke von *J. Steiners* Beweis aus dem Jahre 1836[17]).

§ 99. Konvergenzbeweis von *Wilhelm Gross*.

Wenn man das Vorhandensein einer Lösung unsres isoperimetrischen Problems als selbstverständlich ansieht, so ist mit dem Er-

---

[16]) Man kann zu dem eben geführten Nachweis auch folgenden Mittelwertsatz von *O. Hölder* (1884) heranziehen

$$\Phi(-1) - 2\Phi(0) + \Phi(+1) = \Phi''(h); \quad |h| < 1 .$$

[17]) *J. Steiner*, Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze. Werke II, S. 75–91.

gebnis des letzten Abschnitts die Frage völlig erledigt. Will man aber über diese Schwierigkeit nicht ebenso leichtsinnig hinweggleiten, wie das in ähnlichen Fällen (§ 81; § 96) schon geschehen ist, so ist man durchaus noch nicht über den Berg.

O. Perron hat die Notwendigkeit von Existenzbeweisen an einem zwar trivialen, aber dafür um so schlagenderen Beispiel so auseinandergesetzt: Gibt es unter den Zahlen 1, 2, 3, ... eine größte, so ist es die Zahl Eins. Denn durch das Verfahren des Quadrierens wird jede andre dieser Zahlen vergrößert. Das ist genau dieselbe Schlußweise wie die vorgetragene von *Steiner* herrührende. An Stelle der Zahlen 1, 2, 3, ... hatten wir dort die unendliche Menge der inhaltsgleichen Eiflächen. Anstatt zu quadrieren, wurde dort symmetrisiert.

Der erste, der auf Grund von Methoden, die *K. Weierstraß* in in die Variationsrechnung eingeführt hat, die isoperimetrische Haupteigenschaft der Kugel einwandfrei begründet hat, war *H. A. Schwarz* im Jahre 1884[18]). Ein neues Beweisverfahren, auf das wir im zweiten Teile zurückkommen werden, hat 1903 *H. Minkowski* ersonnen. 1916 hat der Verfasser auf Grund von *Steiner*s Symmetrisierung einen strengen Beweis geführt[19]). In neuer und besonders schöner Weise hat dann 1917 *Wilhelm Gross* diesen Gedanken wieder aufgenommen[20]). Das Verfahren von *Gross*, der 1918 im Alter von 32 Jahren in Wien ein Opfer der Grippe geworden ist, soll hier unter der Beschränkung auf Eiflächen wiedergegeben werden.

Es handelt sich darum Folgendes zu zeigen: Man kann jede Eifläche $\mathfrak{F}$ durch genügend häufiges Symmetrisieren in eine neue inhaltsgleiche Eifläche $\mathfrak{F}_n$ verwandeln, deren Oberfläche sich um beliebig wenig von der Oberfläche $O_{\mathfrak{K}}$ der inhaltsgleichen Kugel $\mathfrak{K}$ unterscheidet. Dann gilt nach § 96 für die Oberflächen

$$O \geqq O_n, \quad \lim O_n = O_{\mathfrak{K}},$$

also

$$O \geqq O_{\mathfrak{K}},$$

w. z. b. ist.

Zum Nachweis nehmen wir innerhalb von $\mathfrak{F}$ einen Punkt $\mathfrak{o}$ an und schlagen um $\mathfrak{o}$ als Mittelpunkt zwei Kugeln, erstens eine Kugel $\mathfrak{K}_0$, die in $\mathfrak{F}$ liegt, zweitens die zu $\mathfrak{F}$ inhaltsgleiche Kugel $\mathfrak{K}$. Der Rauminhalt von $\mathfrak{K}$, der außerhalb $\mathfrak{F}$ liegt, sei mit φ bezeichnet. Da $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{K}$ inhaltsgleich sind, ragt dann auch $\mathfrak{F}$ über $\mathfrak{K}$ um φ hinaus. Wir wollen zeigen:

---

[18]) *H. A. Schwarz*, Beweis des Satzes, daß die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andre Körper gleichen Volumens. Gesammelte Abhandlungen II, S. 327–340.

[19]) *W. Blaschke*, Kreis und Kugel, Leipzig 1916.

[20]) *W. Gross*, Die Minimaleigenschaft der Kugel, Monatshefte für Mathematik und Physik 28 (1917), S. 77–97.

Es läßt sich eine stetige Funktion $\Phi(\varphi)$ angeben, so daß für $\varphi > 0$ auch $\Phi > 0$ ist und daß zu jeder Eifläche $\mathfrak{F}$, die die Kugel $\mathfrak{K}_0$ enthält und um φ über die zu $\mathfrak{F}$ inhaltsgleiche Kugel $\mathfrak{K}$ hinausragt, zwei Kugeln des Inhalts Φ ermittelt werden können, die eine $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{F}$ außerhalb $\mathfrak{K}$, die andre $\mathfrak{S}'$ in $\mathfrak{K}$ außerhalb $\mathfrak{F}$ (Fig. 36).

Wir schlagen um $\mathfrak{o}$ die Kugel, die über $\mathfrak{K}$ um die Schale vom Inhalt φ hinausragt. Diese neue Kugel liegt sicher nicht ganz außerhalb des zu $\mathfrak{K}$ inhaltsgleichen $\mathfrak{F}$. Also gibt es auf der Oberfläche der neuen Kugel einen Punkt $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{F}$. Wir konstruieren die Kugel (Fig. 37), die $\mathfrak{K}$ von außen und den Kegel, der von $\mathfrak{p}$ als Spitze an $\mathfrak{K}_0$ gelegt ist, von innen berührt. Der Inhalt der so gefundenen Kugel (Fig. 37), die sicher in $\mathfrak{F}$ liegt, sei $\Phi_1(\varphi)$. Andrerseits ragt die Kugel um $\mathfrak{o}$ innerhalb $\mathfrak{K}$, die mit $\mathfrak{K}$ zusammen eine

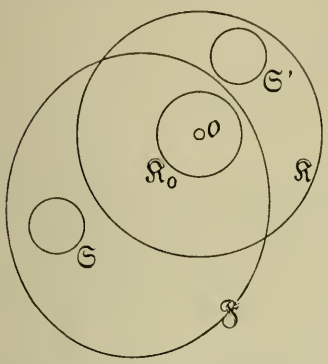


Fig. 36.

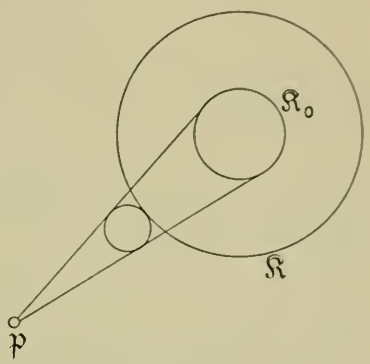


Fig. 37.

Schale des Inhalts φ begrenzt, sicher über $\mathfrak{F}$ hinaus. Wir können daher in dieser Schale eine Kugel ermitteln, die die beiden die Schale begrenzenden Kugeln berührt, und die außerhalb $\mathfrak{F}$ liegt. Ihr Inhalt sei $\Phi_2(\varphi)$. Wir können ihren Mittelpunkt etwa auf dem Fahrstrahl wählen, der von $\mathfrak{o}$ nach dem am nächsten liegenden Punkt von $\mathfrak{F}$ hinweist. Die so erklärten Funktionen $\Phi_1(\varphi)$, $\Phi_2(\varphi)$ könnte man elementar berechnen. Sie sind aber sicher stetig und positiv. Die kleinere unter ihnen

$$\Phi(\varphi) = \tfrac{1}{2}\{\Phi_1(\varphi) + \Phi_2(\varphi)\} - \tfrac{1}{2}|\Phi_1(\varphi) - \Phi_2(\varphi)|$$

hat die behauptete Eigenschaft. Da bei wachsenden φ die Kugeln $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ offenbar größer werden, so ist die Funktion $\Phi(\varphi)$ sicher monoton zunehmend.

Jetzt wollen wir $\mathfrak{F}$ so zu einer Eifläche $\mathfrak{F}_1$ symmetrisieren, daß die Symmetrisierungsrichtung (x_3-Richtung in der Bezeichnung von § 97) in die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Kugeln $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ fällt und die Symmetrieebene ($x_3 = 0$) durch $\mathfrak{o}$ hindurchgeht. Dann

enthält $\mathfrak{F}_1$ wieder die alte Kugel $\mathfrak{K}_0$. Der Rauminhalt φ_1, um den $\mathfrak{F}_1$ über die inhaltsgleiche Kugel $\mathfrak{K}$ hinausragt, genügt der Bedingung

$$0 \leqq \varphi_1 \leqq \varphi - \Phi(\varphi),$$

da die ganze Kugel $\mathfrak{S}$ beim Symmetrisieren innerhalb $\mathfrak{K}$ Platz findet.

Das Verfahren können wir jetzt auf $\mathfrak{F}_1$ neuerdings anwenden unter Wiederverwendung der alten Kugeln $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}$. Für den Rauminhalt φ_2, um den die neue Eifläche $\mathfrak{F}_2$ über $\mathfrak{K}$ hinwegragt, gilt dann

$$\varphi_2 \leqq \varphi_1 - \Phi(\varphi_1).$$

So fahren wir fort. Da die Funktion $\Phi(\varphi)$ monoton wachsend ist, folgt aus

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_1 &\geqq \Phi(\varphi), \\ \varphi_1 - \varphi_2 &\geqq \Phi(\varphi_1), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \varphi_{n-1} - \varphi_n &\geqq \Phi(\varphi_{n-1}) \\ \hline \varphi - \varphi_n &\geqq n\,\Phi(\varphi_n) \end{aligned}$$

und daraus

$$n < \frac{\varphi}{\Phi(\varphi_n)}.$$

Will man also durch n-malige Symmetrisierung eine Eifläche erreichen, die über die inhaltsgleiche Kugel $\mathfrak{K}$ nur um den Raumteil ε hervorragt, so genügen

$$n < \frac{\varphi}{\Phi(\varepsilon)}$$

Wiederholungen des Symmetrisierungsverfahrens.

Damit haben wir einen genauen Einblick in die Konvergenz unsres Verfahrens genommen und können wirklich eine zu $\mathfrak{F}$ inhaltsgleiche Eifläche $\mathfrak{F}_n$ auffinden, deren Oberfläche sich um beliebig wenig von der der inhaltsgleichen Kugel $\mathfrak{K}$ unterscheidet. Das kann man so feststellen (Fig. 38).

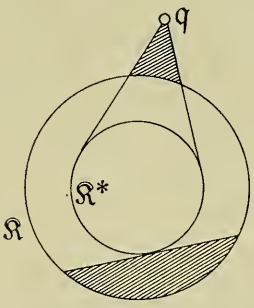


Fig. 38.

Wir zeichnen um $\mathfrak{o}$ eine Kugel $\mathfrak{K}^*$, durch deren Tangentenebenen von $\mathfrak{K}$ ein Raumstück vom Inhalt ε abgeschnitten wird. Dann liegt $\mathfrak{K}^*$ sicher in $\mathfrak{F}_n$. Suchen wir ferner einen Punkt $\mathfrak{q}$ außerhalb $\mathfrak{K}$ auf, so daß der Körper, der von dem Kegel von $\mathfrak{q}$ an $\mathfrak{K}^*$ und von der Kugel $\mathfrak{K}$ begrenzt wird, den Inhalt ε hat, so liegt die Kugel $\mathfrak{K}^{**}$ um $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{q}$ sicher außerhalb $\mathfrak{F}_n$. (Immer unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{F}_n$ über $\mathfrak{K}$ nur um ε hinausragt). Aus der Lagenbeziehung

$$\mathfrak{K}^* < \mathfrak{F}_n < \mathfrak{K}^{**},$$
$$\mathfrak{K}^* < \mathfrak{K} < \mathfrak{K}^{**},$$

und den daraus folgenden Beziehungen zwischen den Oberflächen[21]

$$O^* < O_n < O^{**},$$
$$O^* < O_{\mathfrak{R}} < O^{**},$$

folgt nun

$$|O_{\mathfrak{R}} - O_n| < O^{**} - O^*.$$

Da aber für hinreichend kleines ε die berechenbare Differenz rechts beliebig herabgedrückt werden kann, ist darin das gewünschte Ergebnis enthalten. Unser Konvergenzbeweis genügt allen Forderungen der Exaktheitsfanatiker und „Finitisten". Denn man kann, wenn der Fehler $|O_n - O_{\mathfrak{R}}|$ vorgeschrieben ist, die Anzahl n der zu dieser Annäherung notwendigen Symmetrisierungen durch Berechnung einiger elementarer Funktionen ermitteln.

Bemerkt man schließlich, daß zwischen Rauminhalt V und Oberfläche O bei einer Kugel die Gleichung gilt

$$O^3 - 36\pi V^2 = 0,$$

dann kann man das Ergebnis so fassen:

Zwischen Rauminhalt V und Oberfläche O einer Eifläche besteht die Beziehung

(32) $$O^3 - 36\pi V^2 \geqq 0,$$

und zwar gilt nur für die Kugeln das Gleichheitszeichen.

Die einschränkenden Regularitätsforderungen, die wir der Kürze halber eingeführt haben, sind unwesentlich. Auch die Beschränkung auf Eiflächen ist für das Beweisverfahren unnötig, wie man bei *Gross* nachlesen möge.

Später, im zweiten Teil dieser Vorlesung werden wir die isoperimetrische Ungleichheit (32) unter einem allgemeineren Zusammenhang, den *H. Brunn* und *H. Minkowski* entdeckt haben, wiederfinden.

§ 100. Zweite Variation der Oberfläche.

Wir wollen jetzt die Rechnung von § 89 dahin verfeinern, daß wir bei der Berechnung der Änderung der Oberfläche beim Übergang zu einer Nachbarfläche

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}(u, v) + n\xi(u, v), \quad n = \varepsilon \bar{n}(u, v)$$

auch noch die Glieder zweiter Ordnung in ε ausrechnen. Wir haben

$$\bar{\mathfrak{x}}_u = \mathfrak{x}_u + n\xi_u + n_u\xi,$$
$$\bar{\mathfrak{x}}_v = \mathfrak{x}_v + n\xi_v + n_v\xi;$$

[21]) Daß bei Eiflächen aus $\mathfrak{R}^* < \mathfrak{R}^{**}$ für die Oberflächen $O^* < O^{**}$ folgt, kann man z. B. aus der Formel (4) von § 89 für die Variation einsehen. Umgekehrt kann man diese Ungleichheit auch zur Definition des Begriffs Oberfläche einer Eifläche verwenden, wie es der Verfasser in seinem Büchlein „Kreis und Kugel", Leipzig 1916, S. 58 durchgeführt hat.

daraus ist

$$\begin{aligned}\overline{E} &= \bar{\mathfrak{x}}_u^{\,2} = E - 2nL + n^2\xi_u^{\,2} + n_u^{\,2},\\ \overline{F} &= \bar{\mathfrak{x}}_u\bar{\mathfrak{x}}_v = F - 2nM + n^2\xi_u\xi_v + n_u n_v,\\ \overline{G} &= \bar{\mathfrak{x}}_v^{\,2} = G - 2nN + n^2\xi_v^{\,2} + n_v^{\,2}.\end{aligned}$$

oder nach § 41 (83), (87)

$$\begin{aligned}\overline{E} &= E - 2nL + n^2(2HL - KE) + n_u^{\,2},\\ \overline{F} &= F - 2nM + n^2(2HM - KF) + n_u n_v,\\ \overline{G} &= G - 2nN + n^2(2HN - KG) + n_v^{\,2}.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich weiter, wenn wir

$$\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2 = \overline{W}^2$$

berechnen und die Abkürzung aus § 66 (115)

$$\nabla n = \frac{E n_v^{\,2} - 2F n_u n_v + G n_u^{\,2}}{W^2}$$

verwenden,

(33) $$\overline{W} = W\{1 - 2nH + n^2K + \tfrac{1}{2}\nabla n\} + \dots.$$

Für die Oberfläche folgt daraus durch Integration

$$\overline{O} = O - 2\int nH\cdot do + \int (n^2K + \tfrac{1}{2}\nabla n)\,do + \dots.$$

Setzen wir wie üblich

$$\overline{O} = O + \delta O + \tfrac{1}{2}\delta^2 O + \dots,$$

so haben wir für die „zweite Variation" der Oberfläche die Formel gefunden

(34) $$\boxed{\delta^2 O = \int (2n^2K + \nabla n)\,do.}$$

Ist die Ausgangsfläche insbesondere eine Minimalfläche ($H = 0$), so können wir, anstatt den Differentiator ∇ für die erste Grundform I zu berechnen, den für die dritte Grundform $III = d\xi^2$ verwenden. Es ist in diesem Falle (§ 41, (86))

$$III = -K\cdot I,$$

$$\nabla_I n = -K\cdot\nabla_{III} n.$$

Führt man noch das Flächenelement des sphärischen Bildes $K\,do = d\omega$ ein, so erhält man schließlich

(35) $$\delta^2 O = \int \{2n^2 - \nabla_{III} n\}\,d\omega,$$

eine Formel, die in etwas anderer Form von *H. A. Schwarz* 1872 angegeben worden ist[22]). Es ist besonders auffallend, daß in dieser Formel nur mehr die Funktion n auf der Einheitskugel des sphärischen Bildes auftritt, daß jede Spur der besonderen Minimalfläche, von der ausgegangen wurde, aus der Formel verschwunden ist.

[22]) *H. A. Schwarz*, Gesammelte Abhandlungen I, S. 157.

Es soll hier mit einigen Worten über die Schlüsse berichtet werden, die *H. A. Schwarz* in seiner berühmten Festschrift von 1885[23]), die für die Begründung der Integralgleichungen in der Dissertation von *E. Schmidt* neuerdings vorbildlich geworden ist, aus der Formel (35) für $\delta^2 O$ bei Minimalflächen gezogen hat.

Genau wie in § 83 findet man mittels der Überlegung von *Bliss* aus der Bedingung $\delta^2 O \geqq 0$ die Bedingung von *Jacobi* für das vorliegende Problem von *Plateau*, nämlich

$$2n + \triangle_{III} n = 0.$$

Dabei bedeutet $\triangle_{III}$ den zweiten Differentiator *Beltramis* bezüglich der quadratischen Differentialform III, d. h. bezüglich des Bogenelements des sphärischen Bildes. Führen wir noch einen auf der Kugel unveränderlichen Parameter λ in unsere Differentialgleichung ein:

$$2\lambda n + \triangle_{III} n = 0, \tag{36}$$

dann können wir das Ergebnis von *Schwarz* so aussprechen:

Dafür, daß bei festgehaltenem Rand eine Minimalfläche den kleinsten Wert der Oberfläche unter den benachbarten Flächen ergibt, ist notwendig, daß alle Eigenwerte λ der Differentialgleichung (36) *der Bedingung*

$$\lambda \geqq 1 \tag{37}$$

genügen, und hinreichend, daß

$$\lambda > 1. \tag{38}$$

Dabei heißt die Konstante λ ein *Eigenwert* von (36), wenn es eine nichttriviale Lösung n dieser Gleichung gibt, die auf dem Rande verschwindet.

L. Lichtenstein hat diese Ergebnisse von *Schwarz* neuerdings auf allgemeinere Variationsprobleme übertragen[24]).

§ 101. Erste Variation von H und K.

Zum Abschluß dieses Kapitels sei noch festgestellt, wie sich die beiden Krümmungen H und K einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ bei einer „Normalvariation“

$$\bar{\mathfrak{x}}(u, v) = \mathfrak{x}(u, v) + n(u, v)\,\xi(u, v),$$
$$n(u, v) = \varepsilon\,\overline{n}(u, v), \quad \varepsilon \to 0$$

ändern. Durch Ableitung erhält man

$$\bar{\mathfrak{x}}_u = \mathfrak{x}_u + n\,\xi_u + n_u\,\xi,$$
$$\bar{\mathfrak{x}}_v = \mathfrak{x}_v + n\,\xi_v + n_v\,\xi;$$
$$\bar{\mathfrak{x}}_{uu} = \mathfrak{x}_{uu} + n\,\xi_{uu} + 2\,n_u\,\xi_u + n_{uu}\,\xi,$$
$$\bar{\mathfrak{x}}_{uv} = \mathfrak{x}_{uv} + n\,\xi_{uv} + n_u\,\xi_v + n_v\,\xi_u + n_{uv}\,\xi,$$
$$\bar{\mathfrak{x}}_{vv} = \mathfrak{x}_{vv} + n\,\xi_{vv} + 2\,n_v\,\xi_v + n_{vv}\,\xi.$$

---

[23]) Ebenda, S. 223—269.

[24]) *L. Lichtenstein*, Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme I. Monatshefte für Math. u. Phys. **28** (1917), S. 3—51.

Hieraus ergibt sich, wenn man Glieder, die in ε von zweiter und höherer Ordnung sind, wegläßt

$$(39)\qquad \begin{cases} \overline{E} = E - 2Ln, \\ \overline{F} = F - 2Mn, \\ \overline{G} = G - 2Nn; \end{cases}$$

$$(40)\qquad \begin{aligned} \overline{L} &= L + (KE - 2HL)n + n_{11}, \\ \overline{M} &= M + (KF - 2HM)n + n_{12}, \\ \overline{N} &= N + (KG - 2HN)n + n_{22}. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten die n_{ik} die „kovarianten zweiten Ableitungen" der Funktion n, nämlich

$$\begin{aligned} n_{11} &= n_{uu} - \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} n_u - \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} n_v, \\ n_{12} &= n_{uv} - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} n_u - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} n_v, \\ n_{22} &= n_{vv} - \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} n_u - \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} n_v. \end{aligned}$$

Die Dreizeigersymbole *Christoffel*s wurden in § 48 erklärt. Statt der Ausdrücke $KE - 2HL, \ldots$ könnten wir nach § 41 (87) auch die Koeffizienten der dritten Grundform III (des Bogenelements des sphärischen Bildes) einführen.

Aus (39) und (40) ergeben sich jetzt die gewünschten Formeln

$$(41)\qquad \begin{cases} \overline{K} = K + 2HKn + \dfrac{L n_{22} - 2M n_{12} + N n_{11}}{EG - F^2} + \ldots, \\ \overline{H} = H + (2H^2 - K)n + \dfrac{1}{2} \dfrac{E n_{22} - 2F n_{12} + G n_{11}}{EG - F^2} + \ldots. \end{cases}$$

Dabei ist

$$(42)\qquad \triangle n = \frac{E n_{22} - 2F n_{12} + G n_{11}}{EG - F^2}$$

nichts andres als der uns wohlbekannte zweite Differentiator *Beltrami*s (§ 67) in etwas veränderter Schreibart.

Aus der zweiten Formel (41), die wir auch so schreiben wollen

$$(43)\qquad \delta H = (2H^2 - K)n + \tfrac{1}{2} \triangle n,$$

können wir neuerdings die Formel (34) für $\delta^2 O$ herleiten.

Aus der Formel (4) für die erste Variation von O, das heißt aus

$$(44)\qquad \delta\, do = -2nH \cdot do$$

ergibt sich nämlich durch neuerliche Anwendung des Differentiationsprozesses δ bei festgehaltenem n

$$\begin{aligned} \delta^2 do &= -2n(H \cdot \delta\, do + \delta H \cdot do) = \\ &= (2Kn^2 - n \triangle n)\, do. \end{aligned}$$

Durch Integration folgt daraus wieder (34), wenn wir beachten, daß für verschwindende Randwerte von n nach § 68 (128)

$$\int \nabla n \cdot do = -\int n \Delta n \cdot do \tag{45}$$

ist.

§ 102. Aufgaben und Lehrsätze.

1. Größteigenschaft der Minimalflächen nach *Steiner* (1840). Ein Stück einer Minimalfläche hat stets größeren Flächeninhalt als die benachbarten Parallelflächen. *J. Steiner*, Gesam. Werke II, S. 176.

2. Verbiegung der Minimalflächen nach *O. Bonnet* (1853). Es sei $2\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u) + \mathfrak{z}(v)$ eine Minimalfläche (§ 92), $\mathfrak{y}'^2 = \mathfrak{z}'^2 = 0$. Wir betrachten die von einem Parameter α abhängige Schar von Minimalflächen

$$2\mathfrak{x}(u, v; \alpha) = e^{+\alpha i}\mathfrak{y}(u) + e^{-\alpha i}\mathfrak{z}(v), \tag{46}$$

deren Bogenelement die Form hat

$$2\,ds^2 = \mathfrak{y}'\mathfrak{z}'\,du\,dv. \tag{47}$$

Alle diese *„assoziierten"* Minimalflächen sind also längentreu aufeinander abgebildet (ds^2 ist unabhängig von α). Die einzigen Minimalflächen, die auf eine gegebene abwickelbar sind, sind im wesentlichen ihre Assoziierten. Die Tangentenebenen in entsprechenden Punkten assoziierter Flächen sind parallel. Umgekehrt, sind zwei Flächen längentreu aufeinander so bezogen, daß in entsprechenden Punkten die Tangentenebenen parallel laufen, so sind sie entweder kongruente oder assoziierte Minimalflächen. Entsprechende Linienelemente auf zwei assoziierten Flächen schließen einen festen Winkel ein. Die Flächen, die den Parameterwerten $\alpha = 0$, $\alpha = \pi : 2$ entsprechen, heißen *adjungiert*. Adjungierte Flächen sind so aufeinander bezogen, daß entsprechende Linienelemente senkrecht stehen und den Asymptotenlinien der einen die Krümmungslinien der anderen entsprechen, und umgekehrt. Sind zwei Flächen so aufeinander längentreu abbildbar, daß entsprechende Linienelemente senkrecht stehen, so sind sie adjungierte Minimalflächen. (*O. Bonnet*, Comptes Rendus, Paris **37** (1853), S. 529—532). Jede von zwei adjungierten Flächen läßt sich in der Art von § 94 als Kräfteplan von Spannungen in der anderen deuten. Es treten dann nur Normalspannungen mit konstantem Absolutwert auf, wie das bei einem Flüssigkeitshäutchen der Fall ist.

3. Minimalflächen von *Enneper*. Zwei Parabeln, die in senkrechten Ebenen so liegen, daß der Brennpunkt der einen in den Scheitel der anderen fällt und umgekehrt, nennt man Fokalparabeln. Läßt man zwei Punkte beliebig auf zwei Fokalparabeln wandern, so umhüllt ihre Symmetrieebene eine Minimalfläche mit ebenen Krümmungslinien *A. Enneper*, Zeitschrift f. Math. u. Physik **9** (1864), S. 108.

4. Kettenfläche. Die einzige reelle, unebene Minimalfläche, die zugleich Drehfläche ist, entsteht durch Umdrehung einer Kettenlinie:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{a}{2}\left(e^{+\frac{x_3}{a}} + e^{-\frac{x_3}{a}}\right). \tag{48}$$

5. Wendelfläche. Die einzigen reellen Minimalflächen, die gleichzeitig windschiefe Flächen sind, sind die „Wendelflächen", die durch Schraubung einer Geraden um eine sie rechtwinklig schneidende Achse entstehen. *E. Catalan*, Journal de Mathématiques (1) **7** (1842), S. 203. Wendelfläche und Kettenfläche sind adjungierte Minimalflächen (vgl. Aufg. 2).

6. *Lie*s imaginäre Minimalfläche dritter Ordnung. Die Sehnenmittenfläche einer isotropen Raumkurve dritter Ordnung ist eine algebraische, windschiefe Minimalfläche dritter Ordnung. *Study* hat über diese Flächen *Lie*s Folgendes bewiesen: Alle solche Flächen sind untereinander kongruent. Sie lassen sich als Schraubenflächen erzeugen und sind auf unendlich viele Arten Spiralflächen. Die Gleichung der Fläche läßt sich durch geeignete Achsenwahl auf die Gestalt bringen

$$2(x_1 - ix_2)^3 - 6i(x_1 - ix_2)x_3 - 3(x_1 + ix_2) = 0. \tag{49}$$

S. Lie, Mathem. Annalen **14** (1879), S. 353. *E. Study*, Leipziger Berichte **63** (1911), S. 14—26.

7. Imaginäre Minimalfläche vierter Ordnung nach *Geiser*. Nach *Study* läßt sich die Minimalfläche

$$(x_1 - ix_2)^4 + 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0 \tag{50}$$

als Drehfläche um die auf ihr liegende isotrope Gerade

$$x_1 - ix_2 = 0, \quad x_3 = 0 \tag{51}$$

auffassen. *E. Study*, ebenda (vgl. Aufg. 6).

8. Ein Satz von *Steiner* zum Problem von *Plateau* (1842). Durch eine geschlossene Kurve können unmöglich zwei verschiedene Flächen allerkleinster Oberfläche hindurchgehen, die sich in der Gestalt $x_3 = f_1(x_1, x_2)$, $x_3 = f_2(x_1, x_2)$ darstellen lassen; denn die Fläche $2x_3 = f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2)$ hätte kleinere Oberfläche als beide. *J. Steiner*, Werke II, S. 298.

9. Ein Satz von *Beltrami* über Minimalflächen (1868). Es sei $x_k(u, v)$; $(k = 1, 2, 3)$ eine Minimalfläche. Dann ist $\triangle x_k = 0$, wenn $\triangle$ den zweiten Differentiator *Beltrami*s bezeichnet. Die „Höhenlinien" $x_k =$ konst. und die zugehörigen orthogonalen Trajektorien bilden also eine Schar isothermer Kurven. *E. Beltrami*, Werke II, S. 25.

10. Eine Aufgabe über Minimalflächen. Nach den Formeln (9) von *Weierstraß* besteht zwischen den analytischen Funktionen einerseits und den Minimalflächen anderseits eine innige Beziehung. Es müssen sich also die Eigenschaften der analytischen Funktionen in entsprechenden Eigenschaften der Minimalflächen widerspiegeln und

umgekehrt. Man untersuche nun, was für Eigentümlichkeiten der Minimalflächen den Eigenschaften der analytischen Funktionen entsprechen, die man in neuerer Zeit in Zusammenhang mit dem Satz von *E. Picard* gefunden hat. Vgl. dazu die neuerschienene vortreffliche Darstellung in dem Enzyklopädieartikel von *L. Bieberbach*, Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen; Enzyklopädie II C 4 (1921), S. 409 u. ff.

11. Gleichgewicht einer gravitierenden Flüssigkeit. Es sei $\mathfrak{K}$ ein Körper mit vorgegebenem Rauminhalt V, dV_1 und dV_2 zwei Raumelemente von $\mathfrak{K}$ mit der Entfernung r. Das Integral

$$E = \int_{\mathfrak{K}} \int_{\mathfrak{K}} \frac{dV_1 \cdot dV_2}{r}$$

erreicht dann und nur dann seinen größten Wert, wenn $\mathfrak{K}$ eine Kugel ist (*A. Liapunoff*). Man kann diesen Nachweis wohl am einfachsten mittels *Steiners* Symmetrisierung erbringen. *T. Carleman*, Mathem. Zeitschrift **3** (1919), S. 1—7. Verwandte isoperimetrische Aufgaben bei *W. Blaschke*, Mathem. Zeitschrift **1** (1918), S. 52—57.

12. Literatur über Minimalflächen. An zusammenfassenden Darstellungen der Theorie der Minimalflächen seien genannt: *H. A. Schwarz*, Mathem. Abhandlungen I, Berlin 1890; *G. Darboux*, Théorie des surfaces I, Paris 1887, Livre III. Es ist dies eines der schönsten Kapitel in dem ausgezeichneten Werk von *Darboux* (1842—1917)[25]. *A. Ribaucour*, Étude des Élassoïdes . . ., Bruxelles, Mémoires couronnées par l'Académie de Belgiques, **44** (1881); *E. Beltrami*, Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima (1868), Opere II, S. 1—54. Schließlich hat *E. Study* eine Bearbeitung der Lehre von den Minimalflächen in Aussicht gestellt.

---

[25]) Über Leben und Werk dieses hervorragenden Geometers vgl. man: *A. Voss*, Jahrbuch der Königlich bayerischen Akademie der Wissenschaften 1917, S. 26—53 oder: Jahresbericht der D. Math. Ver. **27** (1918), S. 196—217. Ferner: *L. P. Eisenhart* und *D. Hilbert* in den Acta mathematica **42** (1920), S. 275—284 und S. 269—273. Schließlich sei noch auf den zum Teil autobiographischen Vortrag von *Darboux* verwiesen, den er beim römischen Mathematikerkongreß 1908 gehalten hat: Atti I, S. 105—122.

7. Kapitel.

Liniengeometrie.

Von *J. Plücker* (1801—1868) stammt der Gedanke, als Baustein für eine räumliche Geometrie statt der Punkte oder Ebenen höhere Gebilde, z. B. Geraden oder Kugeln zu verwenden. In beiden Fällen wird unser gewöhnlicher Raum Träger einer vierdimensionalen Gesamtheit, denn sowohl die Geraden wie die Kugeln hängen von vier Konstanten ab. *F. Klein*, der 1866—1868 *Plückers* physikalischer Assistent war, hat *Plückers* Werk zu Ende geführt „Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement" (1868, 1869), in dem *Plücker* seine „Liniengeometrie" hauptsächlich in algebraischer Richtung aufgebaut hatte. Schon vorher ist die Liniengeometrie in Zusammenhang mit der geometrischen Optik insbesondere durch *W. R. Hamilton* (1805—1865) und *E. Kummer* (1810—1893) in differentialgeometrischer Hinsicht entwickelt worden. *Hamiltons* Abhandlungen sind 1828, 1830 erschienen und *Kummers* Schrift über unsern Gegenstand 1860. Später ist die Liniengeometrie in innige und vielfache Beziehungen zur Flächentheorie gekommen[1]).

Hier soll eine Seite der Liniengeometrie behandelt werden, die auf einem sehr reizvollen „Übertragungsprinzip" von *E. Study* beruht, der in Bonn *Plückers* geistiges Erbe verwaltet.

§ 103. *Studys* Übertragungsprinzip.

Study hat gezeigt, daß man die (vierdimensionale) Liniengeometrie in einen merkwürdigen Zusammenhang mit der (zweidimensionalen) Geometrie auf einer Kugelfläche bringen kann, und zwar dadurch, daß man auf der Kugel eine besondere Art komplexer Punkte einführt.

---

[1]) Eine zusammenfassende Darstellung der Liniengeometrie bei *K. Zindler*, Liniengeometrie I, II, Leipzig 1902, 1906. Von demselben Geometer: Die Entwicklung und der gegenwärtige Stand der differentiellen Liniengeometrie, Jahresbericht der D. Math. Ver. **15** (1906), S. 185—213. Man vgl. ferner den jüngst erschienenen ersten Band der gesammelten Abhandlungen von *F. Klein*, Berlin 1921. Ein älteres Lehrbuch der Liniengeometrie ist das von *G. Koenigs*, La géométrie réglée et ses applications, Paris 1895.

Neben das System der gewöhnlichen komplexen Zahlen $a + ib$ mit $i^2 = -1$ tritt nämlich in mancher Hinsicht gleichberechtigt das System der sogenannten *„dualen Zahlen"* $a + \varepsilon b$ des englischen Geometers *W. K. Clifford* (1845—1879). Dabei sollen a und b reell sein, und die neue Einheit ε genügt der Rechenregel $\varepsilon^2 = 0$. Für diese dualen Zahlen gilt z. B. wieder das Vertauschbarkeitsgesetz der Multiplikation, aber es kann natürlich ein Produkt verschwinden, ohne daß irgendein Faktor Null wird. Die Division ist nur dann zulässig, wenn der Divisor von Null verschiedenen Realteil hat, also kein „Nullteiler" ist. Wie man die analytischen Funktionen (Potenzreihen) auf duale Veränderliche überträgt, lehrt das Beispiel:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&\cos(\alpha + \varepsilon\beta) = \cos\alpha\cos\varepsilon\beta - \sin\alpha\sin\varepsilon\beta,\\
&\cos\varepsilon\beta = 1 - \frac{(\varepsilon\beta)^2}{2} + \ldots = 1,\\
&\sin\varepsilon\beta = \varepsilon\beta - \frac{(\varepsilon\beta)^3}{6} + \ldots = \varepsilon\beta,\\
&\cos(\alpha + \varepsilon\beta) = \cos\alpha - \varepsilon\beta\sin\alpha.
\end{aligned}
$$

Wir führen nun zunächst *Plückers Linienkoordinaten* ein. Eine Gerade $\mathfrak{A}$ sei durch zwei auf ihr liegende Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bestimmt. Wir setzen

$$
(2)\qquad \mathfrak{a} = \varrho\,(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}), \qquad \bar{\mathfrak{a}} = \varrho\,(\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}),
$$

wo ϱ einen von Null verschiedenen und im übrigen beliebigen Faktor bedeutet. Die sechs Komponenten a_k, $\bar{a}_k$ dieser beiden Vektoren sind *Plückers* homogene Koordinaten der Geraden $\mathfrak{A}$. Sie sind offenbar an die Bedingung

$$
(3)\qquad \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}} = 0
$$

geknüpft. Wir wollen nun, um den Faktor ϱ festzulegen, überdies

$$
(4)\qquad \mathfrak{a}^2 = 1
$$

fordern, was im reellen Falle, auf den wir uns hier in der Regel beschränken, auf zwei verschiedene Arten erreichbar ist. Jetzt können wir die beiden Vektoren $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ zur Kennzeichnung der gerichteten, d. h. mit einem Durchlaufungssinn versehenen Geraden $\mathfrak{A}$ nehmen, und zwar gibt der Vektor $\mathfrak{a}$ die Richtung. In der Ausdrucksweise der Mechanik ist der zweite Vektor $\bar{\mathfrak{a}}$ das „vektorielle Moment" der in der Geraden $\mathfrak{A}$ wirkenden Einheitskraft $\mathfrak{a}$ um den Ursprung. Die Bedingung dafür, daß ein Punkt $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{A}$ liegt, ist

$$
(5)\qquad \boxed{\mathfrak{x} \times \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}.}
$$

Wir berechnen den Fußpunkt $\underline{\mathfrak{a}}$ des Lotes vom Ursprung auf $\mathfrak{A}$. Es ist

$$
(6)\qquad \underline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}.
$$

Tatsächlich liegt nach (5) dieser Punkt auf $\mathfrak{A}$, denn es ist nach (43) in § 3

$$
\underline{\mathfrak{a}} \times \mathfrak{a} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a})\,\bar{\mathfrak{a}} - (\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}})\,\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}},
$$

und andrerseits ist

$$\mathfrak{a}\,\underline{\mathfrak{a}} = 0.$$

Wir setzen nun nach *Study*

$$\mathfrak{a} + \varepsilon\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{A} \tag{7}$$

und führen damit den „dualen Vektor“ $\mathfrak{A}$ ein mit den Komponenten

$$A_k = a_k + \varepsilon\bar{a}_k; \qquad k = 1, 2, 3. \tag{8}$$

$\mathfrak{A}$ ist ein Einheitsvektor, denn wir haben wegen

$$\mathfrak{a}^2 = 1, \qquad \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}} = 0$$

die Beziehung

$$\mathfrak{A}^2 = (\mathfrak{a} + \varepsilon\bar{\mathfrak{a}})^2 = \mathfrak{a}^2 + 2\,\varepsilon\,\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}} = 1. \tag{9}$$

In dieser Abbildung der Geraden des Raumes auf die dualen Punkte der Einheitskugel $\mathfrak{A}^2 = 1$ *besteht Studys Übertragungsprinzip,* das vielleicht den wesentlichsten Inhalt seines großen Werkes „Geometrie der Dynamen“ (Leipzig 1903) bildet[2]).

Daß diese dem ersten Anschein nach recht willkürliche Zuordnung einen guten Sinn hat, sieht man sofort ein, wenn man nachrechnet, was dem inneren oder skalaren Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$ zweier Vektoren im Linienraum entspricht. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{a} + \varepsilon\bar{\mathfrak{a}}, \\ \mathfrak{A}^* &= \mathfrak{a}^* + \varepsilon\bar{\mathfrak{a}}^* \end{aligned} \tag{10}$$

und finden

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^* + \varepsilon\,(\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}^*\bar{\mathfrak{a}}). \tag{11}$$

Wir behaupten: Die beiden Bestandteile rechts sind Bewegungsinvarianten der beiden Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^*$. Zunächst ist nämlich $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^*$ der Kosinus des Winkels φ der beiden gerichteten Geraden. Es bleibt also nur noch die Bedeutung des Klammerausdrucks zu ermitteln. Wählen wir auf $\mathfrak{A}$ zwei Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x} + \mathfrak{a} = \mathfrak{y}$ und auf $\mathfrak{A}^*$ die Punkte $\mathfrak{x}^*$ und $\mathfrak{x}^* + \mathfrak{a}^* = \mathfrak{y}^*$, so gibt die Determinante

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & x_1^* & x_2^* & x_3^* \\ 1 & y_1^* & y_2^* & y_3^* \end{vmatrix}, \tag{12}$$

nach ihren beiden ersten Zeilen nach dem Determinantensatz von *Laplace* entwickelt, gerade den gewünschten Ausdruck

$$V = \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}^* + \mathfrak{a}^*\bar{\mathfrak{a}}. \tag{13}$$

Subtrahiert man in der Determinante die dritte Zeile von der vierten und dann die erste von der zweiten und dritten, so folgt

$$V = (\mathfrak{a}, \mathfrak{x}^* - \mathfrak{x}, \mathfrak{a}^*). \tag{14}$$

---

[2]) Vgl. dort bes. § 23, S. 185 und die Literaturangaben S. 207, 208.

Verlegt man die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ auf den Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$ in die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes, so erkennt man, daß

$$V = -\varphi \cdot \sin \varphi \tag{15}$$

ist, wenn $\bar{\varphi}$ die Länge dieses gemeinsamen Lotes, d. h. den kürzesten Abstand der Geraden bedeutet. Dabei wäre über die Vorzeichen noch eine geeignete Festsetzung zu treffen. In der Mechanik nennt man V das Moment der einen Geraden um die andere. Sein Vorzeichen ist von der Reihenfolge der Geraden unabhängig, abhängig aber vom Sinn der gerichteten Geraden.

Setzen wir

$$\Phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}, \tag{16}$$

so ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^* = \cos \Phi = \cos \varphi - \varepsilon \bar{\varphi} \sin \varphi. \tag{17}$$

Der „duale Winkel" Φ der Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$ setzt sich aus dem gewöhnlichen Winkel φ und dem kürzesten Abstand $\bar{\varphi}$ zusammen:

$$\Phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}.$$

Insbesondere ergibt sich als Bedingung, daß sich zwei Geraden $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*$ senkrecht schneiden,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^* = 0. \tag{18}$$

Unterwirft man jetzt die Einheitskugel $\mathfrak{A}^2 = 1$ der Gruppe der dualen Drehungen, d. h. den orthogonalen Substitutionen mit dualen Koeffizienten, so entsprechen ihnen die Euklidischen Bewegungen des Linienraums und umgekehrt. Denn die Bewegungen des Raumes sind als stetige Gruppe von Transformationen dadurch gekennzeichnet, daß bei ihnen der duale Winkel zweier Geraden erhalten bleibt.

Den so hergestellten Zusammenhang zwischen der dualen Geometrie auf der Kugel und der Liniengeometrie wollen wir zunächst dazu benutzen, um die geradlinigen Flächen zu untersuchen.

§ 104. Geradlinige Flächen.

Stellen wir den dualen Einheitsvektor

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}(t) + \varepsilon \bar{\mathfrak{a}}(t) \tag{19}$$

in einer Abhängigkeit von einem reellen Parameter t dar, so ist uns dadurch eine geradlinige Fläche gegeben. Dabei wollen wir, um das Stirnrunzeln des gestrengen Geometers zu vermeiden, dem dieses Büchlein gewidmet ist, ausdrücklich den Fall ausschließen, daß $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ nur konstante Vektoren sind. Für den dualen Winkel zweier benachbarter Erzeugenden haben wir

$$d\Phi^2 = (d\varphi + \varepsilon\, d\bar{\varphi})^2 = d\mathfrak{A}^2 = (d\mathfrak{a} + \varepsilon\, d\bar{\mathfrak{a}})^2. \tag{20}$$

Daraus ist

$$d\varphi^2 = d\mathfrak{a}^2, \quad d\varphi \cdot d\bar{\varphi} = d\mathfrak{a} \cdot d\bar{\mathfrak{a}}. \tag{21}$$

und in

$$d = \frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi} = \frac{\mathfrak{a}' \cdot \bar{\mathfrak{a}}'}{\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{a}'} \tag{22}$$

haben wir die einfachste Differentialinvariante der geradlinigen Flächen, die man seit *M. Chasles* (1793—1880) mit dem langweiligen Namen „*Verteilungsparameter*“ zu belegen pflegt, und die wir kürzer den „*Drall*“ der Fläche nennen wollen. Der Drall wird nur bei den Zylindern $\mathfrak{a}'^2 = 0$ unbrauchbar (wenn wir uns, wie erwähnt, auf Reelles beschränken). Sein identisches Verschwinden ist für die Torsen kennzeichnend. Die Zylinder schließen wir im folgenden aus. Geradlinige Flächen, die keine Torsen sind, hatten wir als „windschief“ bezeichnet.

Jetzt führen wir ein unsre geradlinige Fläche begleitendes Dreibein ein, das erstens aus der Erzeugenden $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ besteht und zweitens aus der Geraden

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\mathfrak{A}'}{P}, \quad P = \sqrt{\mathfrak{A}'^2}, \tag{23}$$

endlich drittens aus der Geraden

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 . \tag{24}$$

Um die geometrische Bedeutung von $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ festzustellen, beachten wir, daß aus $\mathfrak{A}^2 = 1$ durch Ableitung nach t

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}' = 0 \tag{25}$$

folgt. Wir behaupten nun zunächst, daß $\mathfrak{A}_3$ das gemeinsame Lot benachbarter Erzeugender $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'\,dt$ ist. Tatsächlich! Wir haben dazu nach (18) nur zu bestätigen, daß

$$\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{A}_3\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'\,dt) = \mathfrak{A}_3\,\mathfrak{A}'\,dt = 0 \tag{26}$$

ist, und daß $\mathfrak{A}_3$ der Normierungsbedingung genügt:

$$\mathfrak{A}_3^2 = (\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)^2 = \mathfrak{A}_1^2\,\mathfrak{A}_2^2 - (\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2)^2 = 1 . \tag{27}$$

Den Schnittpunkt $\mathfrak{x}$ der drei Geraden unsres Dreibeins $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, also den Punkt auf $\mathfrak{A}_1$, der von der Nachbarerzeugenden die kleinste Entfernung hat, werden wir als „*Kehlpunkt*“ der Fläche bezeichnen und den Ort $\mathfrak{x}(t)$ dieses Punktes als ihre „*Kehllinie*“. Statt Kehlpunkt und Kehllinie sagt man wohl auch „*Hauptpunkt*“ und „*Striktionslinie*“. Die Ebene durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ nennt man „*Asymptotenebene*“ unsrer Fläche.

Um den Punkt $\mathfrak{x}$ zu finden, setzen wir zunächst

$$\mathfrak{A}_k = \mathfrak{a}_k + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}}_k \tag{28}$$

und drücken den Vektor $\mathfrak{x}$ durch die drei paarweis senkrechten Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_k$ aus:

$$\mathfrak{x} = \alpha_1\,\mathfrak{a}_1 + \alpha_2\,\mathfrak{a}_2 + \alpha_3\,\mathfrak{a}_3 . \tag{29}$$

Da $\mathfrak{x}$ z. B. auf $\mathfrak{A}_1$ liegt, haben wir nach (5)

$$\mathfrak{x} = a_1 = \bar{a}_1 , \tag{30}$$

und aus (29) folgt

$$\mathfrak{x} = a_1 = -a_2 a_3 + a_3 a_2 . \tag{31}$$

Multipliziert man beide Gleichungen mit a_2, so erhält man wegen $a_2^2 = 1$, $a_2 a_3 = 0$

$$a_3 = a_2 \bar{a}_1 . \tag{32}$$

Daraus durch zyklische Vertauschung:

$$+\mathfrak{x} = (a_3 \bar{a}_2) a_1 + (a_1 \bar{a}_3) a_2 + (a_2 \bar{a}_1) a_3 \tag{33}$$

oder auch, da $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_k$ sich schneiden ($a_i \bar{a}_k + a_k \bar{a}_i = 0$),

$$-\mathfrak{x} = (a_2 \bar{a}_3) a_1 + (a_3 \bar{a}_1) a_2 + (a_1 \bar{a}_2) a_3 . \tag{34}$$

Wir wollen nun die Ableitungen $\mathfrak{A}_k'$ der drei dualen Vektoren $\mathfrak{A}_k$ aus den $\mathfrak{A}_k$ linear aufbauen:

$$\mathfrak{A}_k' = \Sigma a_{kl} \mathfrak{A}_l , \quad a_{kl} = \mathfrak{A}_k' \mathfrak{A}_l . \tag{35}$$

Aus

$$\mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_l = 0 , \quad k \neq l ; \quad \mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_l = 1 , \quad k = l \tag{36}$$

folgt durch Ableitung

$$\mathfrak{A}_k' \mathfrak{A}_l + \mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_l' = a_{kl} + a_{lk} = 0 , \tag{37}$$

d. h. die Matrix der a_{kl} ist schiefsymmetrisch. Das Gleichungssystem (35) hat also die Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1' &= a_{12} \mathfrak{A}_2 - a_{31} \mathfrak{A}_3 , \\ \mathfrak{A}_2' &= a_{23} \mathfrak{A}_3 - a_{12} \mathfrak{A}_3 , \\ \mathfrak{A}_3' &= a_{31} \mathfrak{A}_1 - a_{23} \mathfrak{A}_2 . \end{aligned} \tag{38}$$

Nach (23) war aber $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_1' = P \mathfrak{A}_2$, es ist also $a_{12} = P$, $a_{31} = 0$, und es bleibt nur

$$a_{23} = \mathfrak{A}_2' \mathfrak{A}_3 \tag{39}$$

zu berechnen. Aus (23) folgt durch Ableitung

$$\mathfrak{A}_2' = \frac{\mathfrak{A}''}{P} + \mathfrak{A}' \left(\frac{1}{P} \right)' , \tag{40}$$

und da andrerseits nach (24)

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 = \frac{\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'}{P} \tag{41}$$

war, so finden wir für a_{23}, wofür wir Q setzen wollen, den Ausdruck

$$Q = \frac{(\mathfrak{A}\, \mathfrak{A}'\, \mathfrak{A}'')}{P^2} = \frac{(\mathfrak{A}\, \mathfrak{A}'\, \mathfrak{A}'')}{\mathfrak{A}'^2} . \tag{42}$$

Somit haben unsre Ableitungsgleichungen schließlich die Gestalt:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{A}_1' &= +P \mathfrak{A}_2 , & P &= \sqrt{\mathfrak{A}'^2} , \\ \mathfrak{A}_2' &= -P \mathfrak{A}_1 + Q \mathfrak{A}_3 , & & \\ \mathfrak{A}_3' &= -Q \mathfrak{A}_2 ; & Q &= \frac{(\mathfrak{A}\, \mathfrak{A}'\, \mathfrak{A}'')}{\mathfrak{A}'^2} . \end{aligned}} \tag{43}$$

Trennen wir hierin Reelles und Imaginäres und setzen wir

$$P = p + \varepsilon \bar{p}, \quad Q = q + \varepsilon \bar{q}, \tag{44}$$

so finden wir nach (28) das Gleichungssystem

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{a}_1' &= +p\,\mathfrak{a}_2, \\ \mathfrak{a}_2' &= -p\,\mathfrak{a}_1 + q\,\mathfrak{a}_3, \\ \mathfrak{a}_3' &= -q\,\mathfrak{a}_2; \end{aligned}\right. \tag{45}$$

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\mathfrak{a}}_1' &= +\bar{p}\,\mathfrak{a}_2 + p\,\bar{\mathfrak{a}}_2, \\ \bar{\mathfrak{a}}_2' &= -\bar{p}\,\mathfrak{a}_1 + \bar{q}\,\mathfrak{a}_3 - p\,\bar{\mathfrak{a}}_1 + q\,\bar{\mathfrak{a}}_3, \\ \bar{\mathfrak{a}}_3' &= -\bar{q}\,\mathfrak{a}_2 - q\,\bar{\mathfrak{a}}_2. \end{aligned}\right. \tag{46}$$

Darin sind

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\mathfrak{a}'^2}, \quad \bar{p} = \frac{\mathfrak{a}'\bar{\mathfrak{a}}'}{\sqrt{\mathfrak{a}'^2}}, \\ q &= \frac{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}'')}{\mathfrak{a}'^2}, \\ \bar{q} &= \frac{(\bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}'') + (\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}'\,\mathfrak{a}'') + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\bar{\mathfrak{a}}'')}{\mathfrak{a}'^2} - 2\,\frac{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}'')\,(\mathfrak{a}'\,\bar{\mathfrak{a}}')}{(\mathfrak{a}'^2)^2}. \end{aligned} \tag{47}$$

Mittels (45) (46) zeigt man, daß sich die gefundenen Ausdrücke (33), (34) für den Kehlpunkt $\mathfrak{x}$ auch so schreiben lassen:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} + \frac{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,\bar{\mathfrak{a}}')}{\mathfrak{a}'^2}\,\mathfrak{a} \tag{48}$$

oder, wenn man nach (6)

$$\mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} = \underline{\mathfrak{a}} \tag{49}$$

setzt,

$$\mathfrak{x} = \underline{\mathfrak{a}} - \frac{\mathfrak{a}'\,\underline{\mathfrak{a}}'}{\mathfrak{a}'^2}\,\mathfrak{a}. \tag{50}$$

Unter Benutzung der Ableitungsformeln (45) und (46) folgt aus (33) für den Tangentenvektor der Kehllinie wegen $\mathfrak{a}_k\,\bar{\mathfrak{a}}_k = 0$ und $\mathfrak{a}_k\,\bar{\mathfrak{a}}_l + \mathfrak{a}_l\,\bar{\mathfrak{a}}_k = 0$ die Darstellung

$$\boxed{\mathfrak{x}' = \bar{q}\,\mathfrak{a}_1 + \bar{p}\,\mathfrak{a}_3} \tag{51}$$

und daher

$$\mathfrak{x}'^2 = \bar{p}^2 + \bar{q}^2. \tag{51}_1$$

Ferner findet man mittels der Formel (22) für den Drall der Fläche $\mathfrak{A}_1(t)$ den Wert

$$d_1 = \frac{\mathfrak{a}_1'\,\bar{\mathfrak{a}}_1'}{\mathfrak{a}_1'^2} = \frac{\bar{p}}{p}, \tag{52}_1$$

ebenso für den Drall der Fläche $\mathfrak{A}_2(t)$

$$d_2 = \frac{\mathfrak{a}_2'\,\bar{\mathfrak{a}}_2'}{\mathfrak{a}_2'^2} = \frac{p\,\bar{p} + q\,\bar{q}}{p^2 + q^2} \tag{52}_2$$

und schließlich für den Drall der Fläche $\mathfrak{A}_3(t)$

$$(52)_3 \qquad d_3 = \frac{\mathfrak{a}_3' \mathfrak{a}_3''}{\mathfrak{a}_3'^2} = \frac{q}{\bar{q}} .$$

Daraus folgt, daß die Verhältnisse

$$p : q : \bar{p} : \bar{q}$$

Differentialinvarianten der Fläche $\mathfrak{A}(t)$ sind.

Für die „duale Länge" der sphärischen Kurve $\mathfrak{A}_1(t)$ erhalten wir nach (43), (44)

$$(53) \qquad \int \sqrt{\mathfrak{A}_1'^2}\, dt = \int P\, dt = \int (p + \varepsilon \bar{p})\, dt$$

und für die duale Länge von $\mathfrak{A}_3(t)$

$$(54) \qquad \int \sqrt{\mathfrak{A}_3'^2}\, dt = \int Q\, dt = \int (q + \varepsilon \bar{q})\, dt .$$

Dabei blieb ein Vorzeichen willkürlich. *Somit sind die Integrale*

$$\int p\, dt, \quad \int \bar{p}\, dt, \quad \int q\, dt, \quad \int \bar{q}\, dt$$

Integralinvarianten unsrer geradlinigen Fläche $\mathfrak{A}(t)$.

$p = 0$ kennzeichnet die Zylinder $\mathfrak{A}(t)$. Ist $\bar{p} = 0$, ohne daß $p = 0$ ist, so hat $\mathfrak{A}(t)$ den Drall Null, also ist $\mathfrak{A}(t)$ auf jeden Fall eine Torse, wenn $\bar{p} = 0$ ist. Aus $q = 0$ folgt nach (45) $\mathfrak{a}_3' = 0$ oder $\mathfrak{a}_3 = \text{konst.}$ Wegen $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_3 = 0$ bedeutet also $q = 0$, daß die Erzeugenden von $\mathfrak{A}_1(t)$ einer Ebene („Richtebene") parallel sind. Es bleibt noch der Fall $\bar{q} = 0$ zu untersuchen.

Im allgemeinen, d. h. für $p \neq 0$, $q \neq 0$ entsprechen sich die Flächen $\mathfrak{A}_1(t)$ und $\mathfrak{A}_3(t)$ gegenseitig, d. h. jede besteht aus den kürzesten Abständen der Nachbarerzeugenden der anderen. Daß nämlich $\mathfrak{A}_3$ das Lot von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_1 + d\mathfrak{A}_1$ ist, drückt sich so aus [vgl. (43)]:

$$(55)_1 \qquad \mathfrak{A}_3 = \frac{\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_1'}{P}$$

und die umgekehrte Beziehung durch

$$(55)_2 \qquad \mathfrak{A}_1 = \frac{\mathfrak{A}_3 \times \mathfrak{A}_3'}{Q} .$$

Beide Ausdrücke haben dabei einen guten Sinn, da die Realteile p, q der Nenner nicht verschwinden. Soll nun $\bar{q} = 0$ sein, so hat $\mathfrak{A}_3(t)$ nach $(52)_3$ verschwindenden Drall, ist also eine Torse. $\mathfrak{A}_1(t)$ besteht aus den gemeinsamen Loten benachbarter Erzeugenden der Torse, also aus den Binormalen der von der Torse im allgemeinen umhüllten Raumkurve. $\bar{q} = 0$ bedeutet also, daß $\mathfrak{A}_1(t)$ in der Regel aus den Binormalen einer Kurve besteht.

In dem Sonderfall $\bar{p} = 0$ steckt in unsrer Theorie der geradlinigen Flächen die Theorie der Raumkurven und gleichzeitig die der Kegel. Im ersten Fall ergeben sich für Krümmung und Windung leicht die Werte

$$(56) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{p}{\bar{q}}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{q}{\bar{q}} .$$

Nebenbei bemerkt, kann man außer unsern vier Integralinvarianten für geradlinige Flächen leicht noch weitere bilden, so z. B. die von dem französischen Geometer *G. Koenigs* betrachtete

$$\int \sqrt{\mathfrak{p}\,\bar{\mathfrak{p}}}\,dt = \int \sqrt{\mathfrak{a}'\,\bar{\mathfrak{a}}'}\,dt. \tag{57}$$

Stellen wir einen beliebigen Punkt $\mathfrak{y}$ einer geradlinigen Fläche ausgehend von der Kehllinie $\mathfrak{x}(t)$ in der Form $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + r\mathfrak{a}_1$ durch die Parameter r, t dar, so findet sich nach (45), (51) für das Bogenelement der Fläche der Ausdruck

$$d\mathfrak{y}^2 = dr^2 + 2\,\bar{q}\,dr\,dt + (p^2 r^2 + \bar{p}^2 + \bar{q}^2)\,dt^2. \tag{58$_1$}$$

Daraus folgt etwa mittels (42) in § 36 für das Krümmungsmaß

$$K = -\left\{\frac{p\,\bar{p}}{p^2 r^2 + \bar{p}^2}\right\}^2. \tag{58$_2$}$$

Längs einer Erzeugenden hat also K, wenn $p, \bar{p} \neq 0$ sind, für $r = 0$, also im Kehlpunkt seinen absolut größten Wert.

Aus der Biegungsinvarianz von K (§ 36) folgt: *Sind zwei windschiefe* ($K \neq 0$) *geradlinige Flächen längentreu so aufeinander abgebildet, daß sich die geradlinigen Erzeugenden entsprechen, so entsprechen sich auch die Kehllinien.* Ferner: *Dafür, daß zwei windschiefe Flächen derart aufeinander abbildbar sind, ist notwendig und hinreichend, daß für entsprechende Erzeugende die Verhältnisse* $p : \bar{p} : \bar{q}$ *übereinstimmen.*

§ 105. Besondere geradlinige Flächen.

Wir wollen von der vorhin entwickelten Theorie eine kleine Anwendung machen, indem wir den Drall der geradlinigen Fläche berechnen, die von einer Geraden $\mathfrak{G}$ beschrieben wird, die mit dem begleitenden Dreibein einer gegebenen geradlinigen Fläche $\mathfrak{A}(t)$ starr verbunden ist.

Zu dem Zweck setzen wir den dualen Vektor $\mathfrak{G}$ linear aus den dualen Vektoren $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ zusammen:

$$\mathfrak{G} = G_1\,\mathfrak{A}_1 + G_2\,\mathfrak{A}_2 + G_3\,\mathfrak{A}_3. \tag{59}$$

Dabei bedeuten die G_k feste duale Zahlen mit der Quadratsumme Eins. Durch Ableitung folgt wegen (46)

$$\mathfrak{G}' = -G_2 P\,\mathfrak{A}_1 + (G_1 P - G_3 Q)\,\mathfrak{A}_2 + G_2 Q\,\mathfrak{A}_3. \tag{60}$$

Daraus ergeben sich nebenbei für die im Augenblick ruhende Gerade ($\mathfrak{G}' = 0$) die Bestimmungsstücke

$$G_1 = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}, \quad G_2 = 0, \quad G_3 = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}. \tag{61}$$

Ferner folgt aus (59)

$$\mathfrak{G}'^2 = G_2^2 P^2 + (G_1 P - G_3 Q)^2 + G_2^2 Q^2$$

oder wegen $G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = 1$

$$\mathfrak{G}'^2 = P^2 + Q^2 - (G_3 P + G_1 Q)^2 . \tag{62}$$

Daraus durch Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$\begin{gathered} G_k = g_k + \varepsilon \bar{g}_k , \\ \mathfrak{G} = \mathfrak{g} + \varepsilon \bar{\mathfrak{g}} : \\ \mathfrak{g}'^2 = p^2 + q^2 - (g_3 p + g_1 q)^2 , \\ \mathfrak{g}' \bar{\mathfrak{g}}' = p\bar{p} + q\bar{q} - (g_3 p + g_1 q)(g_3 \bar{p} + g_1 \bar{q} + \bar{g}_3 p + \bar{g}_1 q) . \end{gathered} \tag{63}$$

Somit hat der gesuchte Drall den Wert

$$\frac{\bar{\mathfrak{g}}' \mathfrak{g}'}{\mathfrak{g}' \mathfrak{g}'} = \frac{p\bar{p} + q\bar{q} - (g_3 p + g_1 q)(g_3 \bar{p} + g_1 \bar{q} + \bar{g}_3 p + \bar{g}_1 q)}{p^2 + q^2 - (g_3 p + g_1 q)^2} . \tag{64}$$

Suchen wir jetzt insbesondere die Geraden $\mathfrak{G}$ durch den Kehlpunkt $\mathfrak{x}$ auf, für die der Drall verschwindet. Für die Geraden durch $\mathfrak{x}$ sind die $\bar{g}_k = 0$; denn die $\bar{g}_k$ bedeuten die Drehmomente von $\mathfrak{G}$ um die $\mathfrak{A}_k$. Somit findet sich die Bedingung

$$p\bar{p} + q\bar{q} = (g_3 p + g_1 q)(g_3 \bar{p} + g_1 q) . \tag{65}$$

Das ist die Gleichung eines Kegels zweiten Grades durch $\mathfrak{x}$. Fragen wir nun: *Für welche Flächen $\mathfrak{A}(t)$ behält dieser Kegel, dessen Erzeugende Torsen beschreiben, Gestalt und Lage innerhalb des Dreibeins $\mathfrak{A}_k(t)$ bei?*

Nach (65) ist offenbar dafür notwendig und hinreichend, daß $p : q$ und $\bar{p} : \bar{q}$ längs $\mathfrak{A}(t)$ konstant (also unabhängig von t) bleiben. Wir wollen nun die geometrische Bedeutung der Bedingungen $p : q$ und $\bar{p} : \bar{q} =$ konst. ermitteln. $p : q =$ konst. bedeutet, daß die Erzeugenden $\mathfrak{A}(t)$ mit einer festen Richtung einen festen Winkel bilden. In der Tat! Nimmt man in (59) die Realteile, so erhält man

$$\mathfrak{g}' = -g_2 p \mathfrak{a}_1 + (g_1 p - g_3 q)\mathfrak{a}_2 + g_2 q \mathfrak{a}_3 . \tag{66}$$

Daraus folgt, daß die im Dreibein feste Richtung

$$g_1 = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} , \qquad g_2 = 0 , \qquad g_3 = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \tag{67}$$

auch im Raum fest ist ($\mathfrak{g}' = 0$), was sich leicht umkehren läßt. Aus (51) folgt andrerseits: $\bar{p} : \bar{q} =$ konst. bedeutet, daß die Kehllinie mit der Erzeugenden $\mathfrak{A}(t)$ einen festen Winkel bildet. Da sowohl die Richtung (67) wie die Tangentenrichtung $\mathfrak{x}'$ in der Ebene durch $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_3$ liegen, ist auch der Winkel zwischen $\mathfrak{x}'$ (51) und der raumfesten Richtung (67) unveränderlich. In der Ausdrucksweise von § 15 heißt das: Die Kehllinie $\mathfrak{x}(t)$ ist eine Böschungslinie.

Da $\mathfrak{a}_2$ auf der festen Richtung und auf $\mathfrak{x}'$ senkrecht steht und die Hauptnormale ξ_2 einer Böschungslinie nach § 15 dieselbe Eigenschaft hat, so können wir $\xi_2 = \mathfrak{a}_2$ setzen.

Gehen wir jetzt umgekehrt von einer Böschungslinie $\mathfrak{x}(t)$ aus und konstruieren dazu eine von unsern geradlinigen Flächen $\mathfrak{A}(t)$, die $\mathfrak{x}(t)$ zur Kehllinie hat, so muß wegen $\xi_2 = \mathfrak{a}_2$ die Beziehung bestehen

$$\mathfrak{a}_1 = \xi_1 \cos\vartheta + \xi_3 \sin\vartheta , \qquad \vartheta = \text{konst.} \tag{68}$$

Daraus folgt durch Ableitung mittels der Formeln von *Frenet* aus § 6

$$\mathfrak{a}_1' = \xi_2 \left(\frac{\cos\vartheta}{\varrho} - \frac{\sin\vartheta}{\tau} \right). \tag{69}$$

Somit ist

$$\mathfrak{a}_2 = \frac{\mathfrak{a}_1'}{\sqrt{\mathfrak{a}_1'^2}} = \xi_2 . \tag{70}$$

Also ist die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ auf der Fläche

$$\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{a}_1 + \varepsilon (\mathfrak{x} \times \mathfrak{a}_1) \tag{71}$$

tatsächlich Kehllinie. *Um also eine geradlinige Fläche mit* $p : q = \text{konst.}$, $\bar{p} : \bar{q} = \text{konst.}$ *zu konstruieren, braucht man nur durch die Punkte* $\mathfrak{x}$ *einer Böschungslinie die Erzeugenden mit der Richtung*

$$\mathfrak{a} = \xi_1 \cos\vartheta + \xi_3 \sin\vartheta , \qquad \vartheta = \text{konst.}$$

zu legen.

Dabei ist der Winkel ϑ so zu wählen, daß die Richtung $\mathfrak{a}$ nicht raumfest ausfällt. Das Dreibein der ξ_k ist mit dem der $\mathfrak{a}_k$ starr verbunden. Eine Gerade $\mathfrak{G}$, die mit den $\mathfrak{A}_k$ starr zusammenhängt, ist also auch mit den ξ_k in unveränderlichem Zusammenhang. Somit gibt es bei jeder Böschungslinie einen mit dem begleitenden Dreibein der ξ starr verbundenen Kegel mit der Spitze im Kurvenpunkt, dessen Erzeugende bei der Bewegung des Dreibeins Torsen umhüllen. Diese Eigenschaft ist für die Böschungslinien kennzeichnend. Damit sind wir auf ein von *P. Appell* herrührendes Ergebnis zurückgekommen[3]).

Nach (60) ist für beliebige geradlinige Flächen die Gerade

$$\mathfrak{B}(t) = \frac{Q\,\mathfrak{A}_1 + P\,\mathfrak{A}_3}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \tag{72}$$

das, was dem sphärischen Krümmungsmittelpunkt auf der dualen Kugel entspricht, also etwa die *„Krümmungsachse"* der geradlinigen Fläche $\mathfrak{A}(t)$. $\mathfrak{B}(t)$ könnte man dann die Evolutenfläche zu $\mathfrak{A}(t)$ nennen.

Setzt man in $\mathfrak{B}$ für $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_3$, P, Q die Werte aus (23), (24), (43) ein, so erhält man

$$\mathfrak{B} = \frac{Q\,\mathfrak{A} + \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'}{\sqrt{\mathfrak{A}'^2 + Q^2}} , \qquad Q = \frac{(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{A}'')}{\mathfrak{A}'^2} . \tag{73}_1$$

Bezeichnet man den dualen Winkel zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit $\Theta = \vartheta + \varepsilon\bar{\vartheta}$, so erhält man aus (72)

$$\operatorname{ctg}\Theta = \operatorname{ctg}\vartheta - \frac{\varepsilon\bar{\vartheta}}{\sin^2\vartheta} = \frac{Q}{P} = \frac{(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{A}'')}{(\mathfrak{A}'^2)^{3/2}} ;$$

$$\operatorname{ctg}\vartheta = \frac{q}{p} , \qquad \bar{\vartheta} = \frac{q\bar{p} - p\bar{q}}{p^2 + q^2} . \tag{73}_2$$

[3]) *P. Appell,* Archiv f. Math. u. Phys. (1) **64** (1879), S. 19—23.

§ 106. Strahlensysteme.

Eine Gesamtheit von Geraden, die von zwei wesentlichen Parametern abhängt, nennt man ein „Strahlensystem" oder eine „Kongruenz". Wir wollen den Einheitsvektor $\mathfrak{A}$ als Funktion zweier reeller Parameter u, v darstellen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}(u, v) + \varepsilon \bar{\mathfrak{a}}(u, v) \tag{74}$$

und haben so ein Strahlensystem gegeben. Das duale Bogenelement

$$\begin{aligned} d\mathfrak{A}^2 &= \{(\mathfrak{a}_u du + \mathfrak{a}_v dv) + \varepsilon(\bar{\mathfrak{a}}_u du + \bar{\mathfrak{a}}_v dv)\}^2 \\ &= (\mathfrak{a}_u^2 du^2 + 2\mathfrak{a}_u \mathfrak{a}_v du\, dv + \mathfrak{a}_v^2 dv^2) \\ &\quad + 2\varepsilon\{\mathfrak{a}_u \bar{\mathfrak{a}}_u du^2 + (\mathfrak{a}_u \bar{\mathfrak{a}}_v + \mathfrak{a}_v \bar{\mathfrak{a}}_u) du\, dv + \mathfrak{a}_v \bar{\mathfrak{a}}_v dv^2\} \end{aligned} \tag{75}$$

kürzen wir so ab

$$\begin{aligned} d\mathfrak{A}^2 &= E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 \\ &= e du^2 + 2f du\, dv + g dv^2 + \varepsilon\{\bar{e} du^2 + 2\bar{f} du\, dv + \bar{g} dv^2\} \end{aligned} \tag{76}$$

indem wir setzen

$$\begin{array}{|lll|} \hline E = c + \varepsilon\bar{e}, & F = f + \varepsilon\bar{f}, & G = g + \varepsilon\bar{g}; \\ e = \mathfrak{a}_u^2, & f = \mathfrak{a}_u \mathfrak{a}_v, & g = \mathfrak{a}_v^2; \\ \bar{e} = 2\mathfrak{a}_u \bar{\mathfrak{a}}_u, & \bar{f} = \mathfrak{a}_u \bar{\mathfrak{a}}_v + \mathfrak{a}_v \bar{\mathfrak{a}}_u, & \bar{g} = 2\mathfrak{a}_v \bar{\mathfrak{a}}_v. \\ \hline \end{array} \tag{77}$$

Wir werden im folgenden die „*zylindrischen*" Strahlensysteme, d. h. solche, deren sphärisches Bild $\mathfrak{a}(u, v)$ auf eine Kurve zusammenschrumpft $(eg - f^2 = 0)$, ausschließen.

Um die Abhängigkeit zwischen den beiden quadratischen Differentialformen [4])

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= e du^2 + 2f du\, dv + g dv^2, \\ \mathrm{II} &= \bar{e} du^2 + 2\bar{f} du\, dv + \bar{g} dv^2 \end{aligned} \tag{78}$$

aufzufinden, brauchen wir nur hinzuschreiben, daß die duale Differentialform $\mathrm{I} + \varepsilon\,\mathrm{II}$ das *Gauß*sche Krümmungsmaß Eins hat. Mittels der Formel (138) in § 49 erhält man

$$1 = -\frac{1}{4w^4}\begin{vmatrix} e & c_u & c_v \\ f & f_u & f_v \\ g & g_u & g_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2w}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\frac{e_v - f_u}{w} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{f_v - g_u}{w}\right\}, \tag{79}$$

$$w^2 = eg - f^2$$

---

[4]) Diese Formen hat systematisch zuerst *G. Sannia* zur Grundlage der differentialgeometrischen Behandlung der Strahlensysteme gemacht (Math. Annalen **68** (1910), S. 409—416), nachdem schon *K. Zindler* beide Formen eingeführt hatte.

und eine zweite, etwas längliche Formel

$$0 = \frac{2h}{w^4}\begin{vmatrix} e & e_u & e_v \\ f & f_u & f_v \\ g & g_u & g_v \end{vmatrix} - \frac{1}{4w^4}\left\{\begin{vmatrix} \bar{e} & e_u & e_v \\ \bar{f} & f_u & f_v \\ \bar{g} & g_u & g_v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & \bar{e}_u & e_v \\ f & \bar{f}_u & f_v \\ g & \bar{g}_u & g_v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & e_u & \bar{e}_v \\ f & f_u & \bar{f}_v \\ g & g_u & \bar{g}_v \end{vmatrix}\right\}$$

$$(80)\quad + \frac{h}{w}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\frac{e_v - f_u}{w} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{f_v - g_u}{w}\right\} - \frac{1}{2w}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\frac{\bar{e}_v - \bar{f}_u}{w} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{\bar{f}_v - \bar{g}_u}{w}\right\}$$

$$+ \frac{1}{w}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\, h\,\frac{e_v - f_u}{w} - \frac{\partial}{\partial u}\, h\,\frac{f_v - g_u}{w}\right\},$$

$$4h = \frac{e\bar{g} - 2f\bar{f} + g\bar{e}}{eg - f^2}.$$

Man kann (80) mittels (79) noch ein wenig umformen.

Überträgt man auch die Ableitungsformeln (135) § 48 von *Gauß* auf den vorliegenden Fall, indem man (für $\mathfrak{x} = \xi = \mathfrak{A}$) nach (77)

$$E = -L = e + \varepsilon\bar{e},$$
$$F = -M = f + \varepsilon\bar{f},$$
$$G = -N = g + \varepsilon\bar{g}$$

setzt, so sieht man z. B., daß durch die Grundformen I, II mit den Bedingungen (79) und (80) das Strahlensystem im wesentlichen bestimmt ist.

Untersuchen wir den Drall der geradlinigen Flächen, die durch eine Gerade $\mathfrak{A}$ unseres Systems hindurchgehen und aus Systemgeraden bestehen! Wir finden

$$(81)\quad d = \frac{\mathfrak{a}'\bar{\mathfrak{a}}'}{\mathfrak{a}'^2} = \frac{(\mathfrak{a}_u\,du + \mathfrak{a}_v\,dv)(\bar{\mathfrak{a}}_u\,du + \bar{\mathfrak{a}}_v\,dv)}{(\mathfrak{a}_u\,du + \mathfrak{a}_v\,dv)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\bar{e}\,du^2 + 2\bar{f}\,du\,dv + \bar{g}\,dv^2}{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}.$$

Genau durch die entsprechenden Betrachtungen wie in §§ 35, 37 erhält man für die extremen Werte von d als Funktion der „Fortschreitungsrichtung“ $du : dv$ die Formeln

$$(82)\quad \begin{aligned} (2ed - \bar{e})\,du + (2fd - \bar{f})\,dv &= 0 \\ (2fd - \bar{f})\,du + (2gd - \bar{g})\,dv &= 0 \end{aligned}$$

und daraus

$$4(eg - f^2)d^2 - 2(e\bar{g} - 2f\bar{f} + g\bar{e})\,d + (\bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2) = 0$$

oder

$$(83)\quad d^2 - 2hd + k = 0,$$

$$(84)\quad h = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) = \frac{1}{4}\,\frac{e\bar{g} - 2f\bar{f} + g\bar{e}}{eg - f^2},$$

$$(85)\quad k = d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{4}\,\frac{\bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2}{eg - f^2}.$$

Dabei sind die Nenner $\neq 0$, wenn das Strahlensystem nicht zylindrisch

ist, wie wir angenommen hatten. Aus (82) folgt ferner durch Entfernung von d für die „*Hauptrichtungen*“ $du:dv$

$$\begin{vmatrix} (e\,du + f\,dv)(e\,du + f\,dv) \\ (f\,du + g\,dv)(f\,du + \bar{g}\,dv) \end{vmatrix} = 0 . \tag{86}$$

Da die Differentialform $\mathrm{I} > 0$ definit ist, so sind die geradlinigen Flächen, die der Bedingung (86) genügen, stets reell. Diese Flächen, die den Krümmungslinien entsprechen, könnte man wohl als „*Hauptflächen*“ bezeichnen.

Aus (86) folgt, wenn wir den Ausnahmefall, daß die Differentialformen I, II linear abhängen, auf später (§ 110) verschieben, daß $f = 0$ und $\bar{f} = 0$ wird, sobald man die Hauptflächen zu Parameterflächen $u, v =$ konst. nimmt.

Merken wir noch an, wie sich die Formeln (79), (80) in diesem Fall vereinfachen. Wir finden

$$1 = -\frac{1}{2w}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\frac{e_v}{w} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{g_u}{w}\right\}, \tag{87}$$

$$4h = \frac{1}{w}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\frac{2he_v - \bar{e}_v}{w} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{2hg_u - \bar{g}_u}{w}\right\}; \tag{88}$$

$$h = \frac{1}{4}\frac{e\bar{g} + g\bar{e}}{eg}, \qquad w^2 = eg . \tag{89}$$

Dazu kommen die Ableitungsformeln nach § 48 (136), (137)

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{uu} &= +\frac{E_u}{2E}\mathfrak{X}_u - \frac{E_v}{2G}\mathfrak{X}_v - E\mathfrak{X} , \\ \mathfrak{X}_{uv} &= +\frac{E_v}{2E}\mathfrak{X}_u + \frac{G_u}{2G}\mathfrak{X}_v , \\ \mathfrak{X}_{vv} &= -\frac{G_u}{2E}\mathfrak{X}_u + \frac{G_v}{2G}\mathfrak{X}_v - G\mathfrak{X} . \end{aligned} \tag{90}$$

Durch die Differentialgleichung

$$\mathrm{II} = \bar{e}\,du^2 + 2\bar{f}\,du\,dv + \bar{g}\,dv^2 = 0 \tag{91}$$

sind nach (81) die Torsen definiert, die in unserm Strahlensystem enthalten sind. Während die Hauptflächen stets reell sind, können die Torsen auch imaginär sein ($\bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2 > 0$).

§ 107. Übertragung der Integralformel von *Gauß-Bonnet* auf Strahlensysteme.

Nach *O. Bonnet* drückt sich die Gesamtkrümmung eines einfach zusammenhängenden Flächenstückes folgendermaßen durch ein Randintegral aus (§ 63)

$$\int K \cdot do + \oint \frac{ds}{\varrho_g} = 2\pi .$$

Wir wollen diese Formel auf den Sonderfall eines Flächenstücks auf der Einheitskugel $K = +1$, $\xi = \mathfrak{x}$ anwenden, wo die geodätische Krümmung nach § 54 (11) durch den Ausdruck erklärt ist

$$\frac{1}{\varrho_g} = +(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_s\,\mathfrak{x}_{ss}). \tag{92}$$

Wir finden jetzt

$$\int do + \oint \frac{(\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}'')}{\mathfrak{x}'^2}\,dt = 2\pi\,. \tag{93}$$

Diese Formel wollen wir dual erweitern und auf ein Stück eines Strahlensystems anwenden, dessen sphärisches Abbild ein einfach zusammenhängendes Stück der Einheitskugel ist. Wir haben zunächst

$$\int do = \int\int \sqrt{E\,G - F^2}\,du\,dv = \int\int (1 + 2\varepsilon h)\sqrt{eg - f^2}\,du\,dv \tag{94}$$

oder, wenn wir das Flächenelement des sphärischen Bildes

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v)\,du\,dv = \sqrt{eg - f^2}\,du\,dv = d\omega \tag{95}$$

einführen,

$$\int do = \int (1 + 2\varepsilon h)\,d\omega\ ^{5}). \tag{96}$$

Ferner ist

$$\int \frac{(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{A}'')}{\mathfrak{A}'^2}\,dt = \int Q\,dt\,, \tag{97}$$

wenn wir wie in (45)

$$Q = \frac{(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{A}'')}{\mathfrak{A}'^2} \tag{98}$$

setzen. Somit ist

$$\int (1 + 2\varepsilon h)\,d\omega + \oint Q\,dt = 2\pi \tag{99}$$

oder, wenn man Realteil und Imaginärteil trennt,

$$\int d\omega + \oint q\,dt = 2\pi\,, \tag{100}$$

$$-2\int h \cdot d\omega = \oint \bar{q} \cdot dt\,. \tag{101}$$

Hieraus folgt: *Die Strahlensysteme mit $h = 0$ haben die kennzeichnende Eigenschaft, daß auf ihnen das Integral*

$$\int \bar{q}\,dt \tag{102}$$

nicht vom Wege abhängt.

Diese Strahlensysteme mit $h = 0$ sind nichts anderes als die von uns schon in § 42 betrachteten Normalensysteme. Wir wollen zum Nachweis die Bedingung dafür aufstellen, daß sich eine Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ ermitteln läßt, die die Strahlen eines Systems $\mathfrak{A}(u, v)$ senkrecht durchschneidet. Das Lot vom Ursprung auf einen Strahl $\mathfrak{A}$ hat nach (6) den Vektor

$$\mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} = \underline{\mathfrak{a}}\,. \tag{103}$$

---

[5]) Das über ein Strahlensystem erstreckte Doppelintegral $\int h\,d\omega$ dürfte zuerst von *E. Cartan* betrachtet worden sein, Bulletin société math. France **24** (1896), S. 140—177.

Somit können wir setzen

$$\mathfrak{x}(u,v) = \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} - \varrho\,\mathfrak{a}, \tag{104}$$

wo $\varrho(u,v)$ skalar ist. Durch Ableitung folgt

$$\mathfrak{x}_u = \mathfrak{a}_u \times \bar{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}_u - \varrho_u \mathfrak{a} - \varrho\,\mathfrak{a}_u, \tag{105}$$

$$\mathfrak{x}_v = \mathfrak{a}_v \times \bar{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}_v - \varrho_v \mathfrak{a} - \varrho\,\mathfrak{a}_v. \tag{106}$$

Die Orthogonalität $\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{a} = \mathfrak{x}_v\,\mathfrak{a} = 0$ gibt die Forderungen

$$\varrho_u = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}), \tag{107}$$

$$\varrho_v = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_v\,\bar{\mathfrak{a}}). \tag{108}$$

Hieraus folgt die Integrabilitätsbedingung $\varrho_{uv} = \varrho_{vu}$ oder

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}_v) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_v\,\bar{\mathfrak{a}}_u); \tag{109}$$

denn es ist

$$(\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v\,\bar{\mathfrak{a}}) = 0 \tag{110}$$

wegen

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u) = 0, \quad (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_v) = 0, \quad (\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}) = 0. \tag{111}$$

Multipliziert man nun die Determinanten in (109) mit $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v) \neq 0$ nach dem Multiplikationssatz für Determinanten und führt man für die auftretenden skalaren Produkte die Abkürzungen (77) ein, so findet man

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}_v) - (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_v\,\bar{\mathfrak{a}}_u) = 2h\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v). \tag{112}$$

Damit ist unsre Behauptung begründet.

§ 108. Brennflächen eines Strahlensystems.

Nehmen wir $\bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2 \neq 0$, so können wir die Torsen zu Parameterflächen machen, wenn wir das Strahlensystem analytisch voraussetzen und uns nicht scheuen, gegebenenfalls ($k > 0$) imaginäre Parameterflächen zu verwenden. Für die Kehlpunkte der Torsen, d. h. für die Berührungspunkte mit dem Hüllgebilde haben wir dann nach (48)

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_1 &= \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} + \frac{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}_u)}{\mathfrak{a}_u^2}\,\mathfrak{a}, \\ \mathfrak{d}_2 &= \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} + \frac{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_v\,\bar{\mathfrak{a}}_v)}{\mathfrak{a}_v^2}\,\mathfrak{a}. \end{aligned} \tag{113}$$

Nun ist in unsrem Fall $\bar{e} = \bar{g} = 0$ und somit nach (77)

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v)(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}_u) &= +(\mathfrak{a}_u^2)(\mathfrak{a}_v\,\bar{\mathfrak{a}}_u), \\ (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v)(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_v\,\bar{\mathfrak{a}}_v) &= -(\mathfrak{a}_v^2)(\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}_v). \end{aligned} \tag{114}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_1 &= \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} + \frac{(\mathfrak{a}_v\,\bar{\mathfrak{a}}_u)}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v)}\,\mathfrak{a}, \\ \mathfrak{d}_2 &= \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} - \frac{(\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}_v)}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v)}\,\mathfrak{a}, \end{aligned} \tag{115}$$

$$\mathfrak{d}_2 - \mathfrak{d}_1 = -\frac{(\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}_v) + (\mathfrak{a}_v\,\bar{\mathfrak{a}}_u)}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v)}\,\mathfrak{a} = -\frac{\bar{f}}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v)}\,\mathfrak{a}. \tag{116}$$

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2}{2} = \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} - \tfrac{1}{2}\frac{(\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}_v) - (\mathfrak{a}_v\,\bar{\mathfrak{a}}_u)}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v)}\,\mathfrak{a}. \tag{117}$$

Von der letzten Formel sieht man sofort, daß sie von der Parameterwahl nicht abhängt, denn es ist

$$\mathfrak{a}_u \bar{\mathfrak{a}}_v - \mathfrak{a}_v \bar{\mathfrak{a}}_u = \frac{\partial(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})}{\partial(u_1, v_1)} \frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)}. \tag{118}$$

Man nennt die Punkte $\mathfrak{z}_k$ die *„Brennpunkte"* des Strahls $\mathfrak{A}$ unseres Systems, ihren Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ den *„Mittelpunkt"* des Strahls $\mathfrak{A}$. Für die Entfernung der Brennpunkte folgt aus (116)

$$(\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1)^2 = -\frac{\bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2}{eg - f^2} = -4k, \tag{119}$$

wenn wir die Formel gleich invariant schreiben.

Im allgemeinen werden die Punkte $\mathfrak{z}_1(u, v)$, $\mathfrak{z}_2(u, v)$ Flächen beschreiben. Da bei unsrer speziellen Parameterwahl

$$\frac{\partial \mathfrak{z}_1}{\partial u} = \lambda_1 \mathfrak{a}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{z}_2}{\partial u} = \lambda_2 \mathfrak{a} \tag{120}$$

ist [die Flächen $u, v =$ konst. sind Torsen!], so liegt die Richtung $\mathfrak{a}$ unseres Systemstrahls in den Tangentenebenen, die durch die Vektoren

$$\frac{\partial \mathfrak{z}_k}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{z}_k}{\partial v} \tag{121}$$

bestimmt sind, wenn $\mathfrak{z}_u \times \mathfrak{z}_v \neq 0$. *Die Systemstrahlen sind also im allgemeinen gemeinsame Tangenten der beiden „Brennflächen"* $\mathfrak{z}_k(u, v)$.

Für später merken wir uns die bei beliebigen Parametern gültigen Formeln für die Brennpunkte an

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{m} \pm \mathfrak{a}\sqrt{-k}, \tag{122}$$

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} - \tfrac{1}{2} \frac{\mathfrak{a}_u \bar{\mathfrak{a}}_v - \mathfrak{a}_v \bar{\mathfrak{a}}_u}{(\mathfrak{a}\, \mathfrak{a}_u\, \mathfrak{a}_v)} \mathfrak{a}. \tag{123}$$

§ 109. Formeln von *Hamilton* und *Mannheim*.

Um das Verhalten eines Strahlensystems in der Nähe eines Strahls einfach zu beschreiben, wollen wir an dieser Stelle die Parameter u, v so wählen, daß sie zu den Hauptflächen (§ 106) gehören, so daß $f = 0$, $\bar{f} = 0$ wird und daß $e = g = 1$ ausfällt. Den Ursprung wollen wir in den Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ unsres Strahls verlegen. Dann wird schließlich, wenn d_1, d_2 die Dralle der Hauptflächen bedeuten,

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a}_u \mathfrak{a}_u = 1, && \mathfrak{a}_u \mathfrak{a}_v = 0, && \mathfrak{a}_v \mathfrak{a}_v = 1, \\ &\mathfrak{a}_u \bar{\mathfrak{a}}_u = d_1, && \mathfrak{a}_u \bar{\mathfrak{a}}_v = 0, && \mathfrak{a}_v \bar{\mathfrak{a}}_u = 0, \quad \mathfrak{a}_v \bar{\mathfrak{a}}_v = d_2. \end{aligned} \tag{124}$$

Unsre Formel (81) für den Drall einer Systemfläche vereinfacht sich zu

$$d = \frac{d_1\, du^2 + d_2\, dv^2}{du^2 + dv^2}.$$

Führen wir endlich den Winkel α der Asymptotenebenen (§ 104) ein:

$$du : dv = \cos\alpha : \sin\alpha,$$

so wird

$$\boxed{d = d_1 \cos^2\alpha + d_2 \sin^2\alpha.} \tag{125}$$

Diese Formel für die Dralle aller geradlinigen Flächen eines Strahlensystems durch einen Systemstrahl hat *A. Mannheim* 1872 angegeben[6].

Für die Kehlpunkte unsrer geradlinigen Flächen haben wir nach (48)

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} + r\mathfrak{a},$$

$$r = \frac{(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_u du + \mathfrak{a}_v dv, \bar{\mathfrak{a}}_u du + \bar{\mathfrak{a}}_v dv)}{(\mathfrak{a}_u du + \mathfrak{a}_v dv)^2}$$

oder wegen der Normierung (124) unserer Koordinaten, wenn man Zähler und Nenner von r nach dem Multiplikationssatz für Determinanten mit $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v)$ multipliziert,

$$r = \frac{(d_2 - d_1)\, du\, dv}{du^2 + dv^2}.$$

Führt man wieder den Winkel α ein, so folgt

$$\boxed{r = \frac{d_2 - d_1}{2} \sin 2\alpha.} \tag{126}$$

Dieser Zusammenhang zwischen dem Winkel α der Asymptotenebenen und der Entfernung r des Kehlpunkts vom Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ ist zuerst von *W. R. Hamilton* 1830 gefunden worden[7].

Die Punkte auf unserem Systemstrahl, die den Werten $2\alpha = \pm\pi : 2$ entsprechen

$$r = \pm\frac{d_2 - d_1}{2}$$

werden wohl als „*Grenzpunkte*" bezeichnet. Aus der Formel von *Mannheim* erkennt man auch die Gestalt der geradlinigen Fläche, die von den gemeinsamen Loten unseres Systemstrahls mit seinen Nachbarstrahlen erfüllt wird[8].

§ 110. Isotrope Strahlensysteme.

Die Differentialgleichung (86) der Hauptflächen versagt, wenn

$$e : f : g = \bar{e} : \bar{f} : \bar{g}$$

ist. Solche Strahlensysteme mit der kennzeichnenden Eigenschaft, daß *alle (reellen) Systemflächen durch einen Systemstrahl dort denselben Drall besitzen* (vgl. Formel (81)), nennt man nach *A. Ribaucour isotrop*[9].

[6]) *A. Mannheim, Liouvilles* Journal (2) **17** (1872), S. 126.

[7]) *W. R. Hamilton*, Transact. of the Irish Ac. **15** (1828) und **16** (1830).

[8]) Vgl. § 115, Aufgabe 3.

[9]) *A. Ribaucour*, Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle, Mem. cour. **44**, Brüssel 1881. Der Ausdruck „Elassoid" für Minimalfläche hat sich nicht eingebürgert.

Legen wir für das sphärische Bild $\mathfrak{a}(u, v)$ isotherme Parameter (vgl. § 71) zugrunde:

$$(127)_1 \qquad d\mathfrak{a}^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2),$$

so können wir nach (76) setzen

$$(127)_2 \qquad d\mathfrak{A}^2 = \Lambda^2 (du^2 + dv^2), \qquad \Lambda = \lambda (1 + \varepsilon\mu);$$

$$(128) \qquad \begin{cases} e = \lambda^2, & f = 0, & g = \lambda^2; \\ \bar{e} = 2\lambda^2\mu, & \bar{f} = 0, & \bar{g} = 2\lambda^2\mu. \\ & (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v) = \lambda^2, \\ & k = \mu^2, \qquad h = \mu. \end{cases}$$

Setzen wir ferner

$$w = u + iv,$$

so wird

$$(129) \qquad \mathfrak{A} = \Re(\alpha(w) + \varepsilon\bar{\alpha}(w)),$$

wo α und $\bar{\alpha}$ analytische Vektorfunktionen der komplexen Veränderlichen w sind und $\Re$ den von der imaginären Einheit i freien Bestandteil hervorhebt. Für den Kehlpunkt einer Systemfläche erhält man jetzt nach (48)

$$(130) \qquad \mathfrak{y} = \Re\left\{\alpha \times \bar{\alpha} + \frac{(\alpha\,\alpha'\,\bar{\alpha}')}{\alpha'^2}\right\},$$

da $(du + i\,dv)^2$ sich weghebt. Daraus folgt: *Alle Systemflächen eines isotropen Strahlensystems durch denselben Systemstrahl haben dort denselben Kehlpunkt.*

Einfacher kommt man zu dieser Erkenntnis mittels der Formel (126) von *Hamilton*. Für ein isotropes Strahlensystem ist nämlich $d_1 = d_2$ und daher $r = 0$. Umgekehrt ist die gefundene Eigenschaft für die isotropen Strahlensysteme kennzeichnend. Denn aus (126) folgt, daß r nur für $d_1 = d_2$ unabhängig von α sein kann; und dann ist nach der Formel (125) von *Mannheim* auch d unabhängig von α, also das Strahlensystem tatsächlich isotrop.

Stellen wir unter Verwendung des Bogenelements $(127)_2$ für die isotropen Strahlensysteme die Hauptformeln zusammen! Es ist das Krümmungsmaß

$$(131) \qquad -\frac{1}{\Lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log\Lambda = 1.$$

Beachtet man, daß

$$(132) \qquad \log\Lambda = \log\lambda + \varepsilon\mu,$$

so folgt durch Abtrennung des Realteils

$$(133) \qquad -\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\log\lambda = 1,$$

$$(134) \qquad -\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\mu = 2\mu.$$

Aus (90) folgt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{uu} &= +\frac{A_u}{A}\mathfrak{A}_u - \frac{A_v}{A}\mathfrak{A}_v - A^2\mathfrak{A},\\
\mathfrak{A}_{uv} &= +\frac{A_v}{A}\mathfrak{A}_u + \frac{A_u}{A}\mathfrak{A}_v,\\
\mathfrak{A}_{vv} &= -\frac{A_u}{A}\mathfrak{A}_u + \frac{A_v}{A}\mathfrak{A}_v - A^2\mathfrak{A}.
\end{aligned} \tag{135}$$

Durch Trennung der reellen und imaginären Teile ergibt sich daraus

$$\begin{cases}
\mathfrak{a}_{uu} = +\dfrac{\lambda_u}{\lambda}\mathfrak{a}_u - \dfrac{\lambda_v}{\lambda}\mathfrak{a}_v - \lambda^2\mathfrak{a},\\
\mathfrak{a}_{uv} = +\dfrac{\lambda_v}{\lambda}\mathfrak{a}_u + \dfrac{\lambda_u}{\lambda}\mathfrak{a}_v \quad *\quad ,\\
\mathfrak{a}_{vv} = -\dfrac{\lambda_u}{\lambda}\mathfrak{a}_u + \dfrac{\lambda_v}{\lambda}\mathfrak{a}_v - \lambda^2\mathfrak{a};
\end{cases} \tag{136}$$

$$\begin{cases}
\bar{\mathfrak{a}}_{uu} = +\mu_u\mathfrak{a}_u - \mu_v\mathfrak{a}_v - 2\lambda^2\mu\mathfrak{a} + \dfrac{\lambda_u}{\lambda}\bar{\mathfrak{a}}_u - \dfrac{\lambda_v}{\lambda}\bar{\mathfrak{a}}_v - \lambda^2\bar{\mathfrak{a}},\\
\bar{\mathfrak{a}}_{uv} = +\mu_v\mathfrak{a}_u + \mu_u\mathfrak{a}_v \quad * \quad + \dfrac{\lambda_v}{\lambda}\bar{\mathfrak{a}}_u + \dfrac{\lambda_u}{\lambda}\bar{\mathfrak{a}}_v \quad * \quad ,\\
\bar{\mathfrak{a}}_{vv} = -\mu_u\mathfrak{a}_u + \mu_v\mathfrak{a}_v - 2\lambda^2\mu\mathfrak{a} - \dfrac{\lambda_u}{\lambda}\bar{\mathfrak{a}}_u + \dfrac{\lambda_v}{\lambda}\bar{\mathfrak{a}}_v - \lambda^2\bar{\mathfrak{a}}.
\end{cases} \tag{137}$$

§ 111. Beziehungen der isotropen Strahlensysteme zu den Minimalflächen.

Aus (123) folgt wegen $f = \mathfrak{a}_u\bar{\mathfrak{a}}_v + \mathfrak{a}_v\bar{\mathfrak{a}}_u = 0$ für den Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ der Brennpunkte

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} - \frac{\mathfrak{a}_u\mathfrak{a}_v}{\lambda^2}\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} + \frac{\mathfrak{a}_v\bar{\mathfrak{a}}_u}{\lambda^2}\mathfrak{a}. \tag{138}$$

Wir wollen daraus die Ableitungen $\mathfrak{m}_u$ und $\mathfrak{m}_v$ ermitteln. Wir finden

$$\mathfrak{m}_u = \mathfrak{a}_u \times \bar{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}_u - \frac{\mathfrak{a}_{uu}\bar{\mathfrak{a}}_v + \mathfrak{a}_u\bar{\mathfrak{a}}_{uv}}{\lambda^2}\mathfrak{a} + 2\frac{\mathfrak{a}_u\bar{\mathfrak{a}}_v\lambda_u}{\lambda^3}\mathfrak{a} - \frac{\mathfrak{a}_u\bar{\mathfrak{a}}_v}{\lambda^2}\mathfrak{a}_u. \tag{139}$$

Zerlegen wir diesen Vektor nach den drei paarweise senkrechten Richtungen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_u, \mathfrak{a}_v$, so erhalten wir

$$\mathfrak{m}_u\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}) - \frac{\mathfrak{a}_{uu}\bar{\mathfrak{a}}_v + \mathfrak{a}_u\bar{\mathfrak{a}}_{uv}}{\lambda^2} + \frac{2\,\mathfrak{a}_u\bar{\mathfrak{a}}_v\lambda_u}{\lambda^3}. \tag{140}$$

Beachten wir, daß nach dem Multiplikationssatz für Determinanten

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}})(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v) = \lambda^2(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}) = \lambda^2\mathfrak{a}_v\bar{\mathfrak{a}}$$

oder

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{a}_v\bar{\mathfrak{a}}$$

ist, und rechnen wir das zweite Glied rechts in (140) mittels der Ableitungsformeln (136), (137) um, so finden wir

$$\mathfrak{m}_u\mathfrak{a} = -\mu_v.$$

wenn wir beachten, daß wegen $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}} = 0$ durch Ableitung $\mathfrak{a}_v\bar{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{a}}_v = 0$ ist. Entsprechend findet sich

$$\mathfrak{m}_u\mathfrak{a}_u = 0, \qquad \mathfrak{m}_u\mathfrak{a}_v = \lambda^2\mu$$

und somit ist

$$\mathfrak{m}_u = -\mu_v\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a}_v. \tag{141}$$

Ebenso erhalten wir

$$\mathfrak{m}_v = +\mu_u\mathfrak{a} - \mu\mathfrak{a}_u. \tag{142}$$

Es ist

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}_u\,\mathfrak{m}_v) = \lambda^2\mu^2, \tag{143}$$

für $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ beschreibt also der Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ eine Fläche. Diese Mittenfläche steht nach *Ribaucour* in einer merkwürdigen Beziehung zur Kugel $\mathfrak{a}^2 = 1$. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{a}_u\,du + \mathfrak{a}_v\,dv)(\mathfrak{m}_u\,du + \mathfrak{m}_v\,dv)\\ &= (\mathfrak{a}_u\,du + \mathfrak{a}_v\,dv)\{(-\mu_v\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a}_v)\,du + (+\mu_u\mathfrak{a} - \mu\mathfrak{a}_u)\,dv\} = 0,\end{aligned} \tag{144}$$

d. h.: *Entsprechende Linienelemente der Kugel* $\mathfrak{a}(u, v)$ *und der Mittenfläche* $\mathfrak{m}(u, v)$ *stehen aufeinander senkrecht.*

Umgekehrt können wir zeigen: *Entspricht eine Fläche* $\mathfrak{m}(u, v)$ *der Einheitskugel* $\mathfrak{a}(u, v)$ *unter Orthogonalität zugeordneter Linienelemente, so bilden die Strahlen durch* $\mathfrak{m}$ *mit der Richtung* $\mathfrak{a}$ *eine isotrope Kongruenz.*

Wir wollen die Kugel $\mathfrak{a}(u, v)$ auf ein isothermes Parametersystem beziehen, so daß

$$d\mathfrak{a}^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2) \tag{145}$$

wird und die Bedingungen (136) gelten. Dann folgt aus der Voraussetzung

$$(\mathfrak{a}_u\,du + \mathfrak{a}_v\,dv)(\mathfrak{m}_u\,du + \mathfrak{m}_v\,dv) = 0, \tag{146}$$

daß sich $\mathfrak{m}_u$, $\mathfrak{m}_v$ in der Form darstellen lassen

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_u &= \alpha\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a}_v,\\ \mathfrak{m}_v &= \beta\mathfrak{a} - \mu\mathfrak{a}_u.\end{aligned} \tag{147}$$

Unter Berücksichtigung von (136) ergibt dann die Integrabilitätsbedingung $\mathfrak{m}_{uv} = \mathfrak{m}_{vu}$ das Gleichungssystem

$$\alpha = -\mu_v, \qquad \beta = +\mu_u$$

$$\mu_{uu} + \mu_{vv} = -2\lambda^2\mu.$$

Setzen wir jetzt

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}, \qquad \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m} \times \mathfrak{a},$$

so bekommen wir für das Strahlensystem dieser Geraden $\mathfrak{A}$ das duale Bogenelement

$$\lambda^2(1 + 2\varepsilon\mu)(du^2 + dv^2).$$

Darin ist die Bestätigung unsrer Behauptung enthalten, daß dieses Strahlensystem isotrop ist.

Errichten wir jetzt auf jedem Systemstrahl $\mathfrak{A}$ im Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ die senkrechte Ebene und bestimmen wir die Hüllfläche dieser Ebenen! Es gelten für den Berührungspunkt $\mathfrak{x}$ nach (141), (142) die Gleichungen

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{x} - \mathfrak{m})\,\mathfrak{a} = 0, \\ &(\mathfrak{x} - \mathfrak{m})\,\mathfrak{a}_u - \mathfrak{m}_u\,\mathfrak{a} = -\mu_v, \\ &(\mathfrak{x} - \mathfrak{m})\,\mathfrak{a}_v - \mathfrak{m}_v\,\mathfrak{a} = +\mu_u \end{aligned} \tag{148}$$

und daraus ergibt sich für den Berührungspunkt

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{m} - \frac{\mu_v}{\lambda^2}\,\mathfrak{a}_u + \frac{\mu_u}{\lambda^2}\,\mathfrak{a}_v. \tag{149}$$

Untersuchen wir jetzt die Brennflächen! Nach (122), (128) beschreibt der Punkt

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{m} + i\,\mu\,\mathfrak{a}$$

eine dieser Brennflächen, deren Tangentenebene durch $\mathfrak{A}$ geht, also in laufenden $\mathfrak{y}$ die Gleichung

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{m},\ \mathfrak{a},\ (\mathfrak{m} + i\,\mu\,\mathfrak{a})_u) = 0$$

oder

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{m},\ \mathfrak{a},\ (\mathfrak{m} + i\,\mu\,\mathfrak{a})_v) = 0$$

besitzt. Beides gibt nach (141), (142) wegen $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{a}_v + i\,\mathfrak{a}_u) = -\mathfrak{a}_u + i\,\mathfrak{a}_v$

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{m})\,(\mathfrak{a}_u - i\,\mathfrak{a}_v) = 0. \tag{150}$$

Da $(\mathfrak{a}_u - i\,\mathfrak{a}_v)^2 = 0$ ist, ist demnach diese Ebene isotrop und somit die Brennfläche eine isotrope Torse, also im allgemeinen die Tangentenfläche einer isotropen Kurve. Um den Berührungspunkt $\mathfrak{y}$ mit der umhüllten Kurve zu ermitteln, brauchen wir nur die Gleichung (150) bei festem $\mathfrak{y}$ zweimal nach u oder v abzuleiten und finden unter Beachtung der Gleichung (150) selbst mittels (136), (141), (142)

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{m})\,\mathfrak{a} = i\,\mu, \tag{151}$$

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{m})\,\mathfrak{a}_u = i\,(\mu_u + i\,\mu_v). \tag{152}$$

Aus (150) und (152) folgt

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{m})\,\mathfrak{a}_v = \mu_u + i\,\mu_v \tag{153}$$

und aus (150) bis (153)

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{m} + i\,\mu\,\mathfrak{a} + i\,\frac{\mu_u + i\,\mu_v}{\lambda^2}\,(\mathfrak{a}_u - i\,\mathfrak{a}_v). \tag{154}$$

Der konjugiert imaginäre Brennpunkt $\mathfrak{m} - i\,\mu\,\mathfrak{a}$ beschreibt die konjugiert imaginäre Torse und wir erhalten den konjugiert imaginären Berührungspunkt mit dem Hüllgebilde

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{m} - i\,\mu\,\mathfrak{a} - i\,\frac{\mu_u - i\,\mu_v}{\lambda^2}\,(\mathfrak{a}_u + i\,\mathfrak{a}_v). \tag{155}$$

Vergleicht man nun die Formeln (154), (155) und (149), so ergibt sich

$$2\,\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \mathfrak{z}. \tag{156}$$

Da nun $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$, wenn sie nicht beide fest sind, isotrope Kurven durchlaufen, so beschreibt nach (156) $\mathfrak{x}$ im allgemeinen eine Minimalfläche (§ 90 (7)).

Die Mittelebenen der Strahlen eines isotropen Strahlensystems umhüllen in der Regel eine Minimalfläche (*Ribaucour* 1880).

Diese Minimalfläche schrumpft nur dann auf einen einzigen Punkt zusammen, wenn $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ im Raume festliegen, wenn also die Brennflächen unsres Strahlensystems mit den isotropen Kegeln zusammenfallen, die diese Punkte zu Spitzen haben.

Umgekehrt gilt:

Bringt man die konjugiert imaginären Tangentenebenen zweier konjugiert imaginärer isotroper Torsen zum Schnitt, so ist die Gesamtheit der Schnittgeraden ein isotropes Strahlensystem.

Ohne Rechnung ist das so einzusehen. Bringt man alle Paare von Tangentenebenen der beiden Torsen zum Schnitt, so erhält man neben den reellen auch noch die imaginären Strahle unsres Systems und erkennt sofort, daß die im System enthaltenen Torsen in die Tangentenebenen der gegebenen Torsen fallen. Die sphärischen Bilder aller Strahlen einer solchen isotropen Ebene fallen in die Punkte einer geradlinigen Erzeugenden der Kugel $\mathfrak{a}^2 = 1$, also in eine isotrope Gerade der Kugel. Aus dem Verschwinden der quadratischen Form II für eine Systemfläche folgt also das Verschwinden des Bogenelements des sphärischen Bildes. D. h. die Differentialformen I und II haben gemeinsame Nullinien und daher ist

$$e : f : g = \bar{e} : \bar{f} : \bar{g} .$$

Das war aber die Definitionseigenschaft der isotropen Strahlensysteme.

§ 112. Darstellung der isotropen Strahlensysteme durch stereographische Linienkoordinaten.

Wir wollen jetzt die Theorie der isotropen Strahlensysteme neuerdings begründen, und zwar mittels eines Verfahrens, das im wesentlichen auf *J. Grünwald* (1876—1911) zurückgeht. Dieses Verfahren hat den Vorteil, eine äußerst einfache Darstellung der isotropen Strahlensysteme zu ergeben, die mit den Formeln von *Weierstrass* für Minimalflächen (§ 91) nahe zusammenhängt. Dafür muß man den Nachteil völliger Unsymmetrie in Kauf nehmen.

Benutzen wir die Formeln (10) von § 91, um die Punkte $\mathfrak{A}$ der dualen Einheitskugel $\mathfrak{A}^2 = 1$ auf die dualen Punkte einer Ebene stereographisch abzubilden. Wir setzen dementsprechend für die Koordinaten A_k von $\mathfrak{A}$

$$A_1 = \frac{2R}{1+(R^2+S^2)},$$

(157)
$$A_2 = \frac{2S}{1+(R^2+S^2)},$$

$$A_3 = \frac{1-(R^2+S^2)}{1+(R^2+S^2)}$$

und umgekehrt

$$(158)\qquad R = \frac{A_1}{1+A_3}, \qquad S = \frac{A_2}{1+A_3}.$$

Die rechtwinkligen Koordinaten R und S fassen wir jetzt zu einer komplex-dualen Verbindung zusammen, indem wir die R-, S-Ebene als Zahlenebene von *Gauß* ansehen:

$$(159)\qquad R + iS = T.$$

Setzen wir

$$(160)\qquad R = r + \varepsilon\, \varrho, \quad S = s + \varepsilon\, \sigma, \quad T = t + \varepsilon\, \tau,$$

so haben wir also

$$(161)\qquad \begin{aligned} t &= r + is, \\ \tau &= \varrho + i\sigma, \end{aligned}$$

wo r, s, ϱ, σ reelle und t, τ gewöhnliche komplexe Zahlen sind[10]).

Wir können nun das Paar komplexer Zahlen t, τ als Koordinaten für unsre gerichtete Gerade $\mathfrak{A}$ verwerten. Man könnte t, τ vielleicht als *stereographische Linienkoordinaten* bezeichnen. Dann gilt der Satz:

Die isotropen Strahlensysteme sind durch eine analytische Beziehung zwischen den stereographischen Linienkoordinaten t, τ gekennzeichnet (*J. Grünwald*).

Zum Nachweis berechnen wir den Drall einer geradlinigen Fläche, die dadurch gegeben sein möge, daß t, τ als komplexe Funktionen einer reellen Veränderlichen vorgeschrieben sind. Es ergibt sich aus (158) wegen $\mathfrak{A}^2 = 1$

$$(162)\qquad \frac{\sqrt{d\mathfrak{A}^2}}{1+A_3} = \sqrt{dR^2 + dS^2} = \sqrt{dr^2 + ds^2}\left(1 + \varepsilon \frac{dr\,d\varrho + ds\,d\sigma}{dr^2 + ds^2}\right).$$

Nun gilt für den Drall d nach (22)

$$(163)\qquad \frac{\sqrt{d\mathfrak{A}^2}}{1+A_3} = \frac{\sqrt{da^2}\cdot\{1+\varepsilon d\}}{(1+a_3)\left(1+\frac{\varepsilon\,\bar{a}_3}{1+a_3}\right)} = \frac{\sqrt{da^2}}{1+a_3}\left\{1+\varepsilon\left(d - \frac{\bar{a}_3}{1+a_3}\right)\right\}.$$

Bildet man in (162) und in (163) den Quotienten aus dem mit ε behafteten und dem von ε freien Teil, so ergibt sich durch Gleichsetzen der beiden Quotienten

$$(164)\qquad d = \frac{\bar{a}_3}{1+a_3} + \frac{dr\,d\varrho + ds\,d\sigma}{dr^2 + ds^2}.$$

Soll nun $\varrho(r, s)$, $\sigma(r, s)$ ein isotropes Strahlensystem sein[11]), so ist dazu nach § 110 notwendig und hinreichend, daß der Drall d einer

[10]) Wegen dieser Zuordnung vgl. man *J. Grünwald*, Monatshefte für Math. u. Phys. **17** (1906), S. 81—136 und *W. Blaschke*, ebenda **21** (1910), S. 201—308.

[11]) Bei einem nicht-zylindrischen Strahlensystem können wir immer r, s als unabhängige Veränderliche nehmen.

Systemfläche unabhängig von der Fortschreitungsrichtung $dr:ds$ ausfällt. Es muß also

$$(165)\qquad \frac{dr\,d\bar{r}+ds\,d\bar{s}}{dr^2+ds^2}=\frac{\frac{\partial\bar{r}}{\partial r}dr^2+\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial s}+\frac{\partial\bar{s}}{\partial r}\right)dr\,ds+\frac{\partial\bar{s}}{\partial s}ds^2}{dr^2+ds^2}$$

unabhängig von $dr:ds$ werden. Dazu ist notwendig und hinreichend das Bestehen der Gleichungen von *Cauchy* und *Riemann*

$$(166)\qquad \frac{\partial\bar{r}}{\partial r}-\frac{\partial\bar{s}}{\partial s}=0,\quad \frac{\partial\bar{r}}{\partial s}+\frac{\partial\bar{s}}{\partial r}=0.$$

Diese Gleichungen sagen aber tatsächlich aus, daß $\bar{t}=\bar{r}+i\bar{s}$ eine analytische Funktion von $t=r+is$ ist, w. z. b. w.

Daraus folgt, daß durch Transformationen von der Form

$$(167)\qquad \begin{aligned} r^*+is^*&=\varphi(r+is,\ \bar{r}+i\bar{s}),\\ \bar{r}^*+i\bar{s}^*&=\psi(r+is,\ \bar{r}+i\bar{s})\end{aligned}$$

und

$$(168)\qquad \begin{aligned} r^*-is^*&=\varphi(r+is,\ \bar{r}+i\bar{s}),\\ \bar{r}^*-i\bar{s}^*&=\psi(r+is,\ \bar{r}+i\bar{s}),\end{aligned}$$

wo φ und ψ analytische Funktionen mit gemeinsamem Existenzbereich sind, die isotropen Strahlensysteme wieder in solche übergeführt werden. Unter geeigneten Voraussetzungen läßt sich überdies zeigen, daß diese Eigenschaften für unsre Transformationen kennzeichnend sind.

Hierfür sei ein Beweis von *A. Ostrowski* mitgeteilt. Setzen wir

$$(169)\qquad \begin{aligned} r+is&=t,\quad r-is=\tau;\\ \bar{r}+i\bar{s}&=\bar{t},\quad \bar{r}-i\bar{s}=\bar{\tau},\end{aligned}$$

dann können wir von unsern Transformationen annehmen, daß sie sich in der Form schreiben lassen

$$(170)\qquad \begin{aligned} t^*=r^*+is^*&=\varphi(t,\bar{t};\ \tau,\bar{\tau}),\\ \bar{t}^*=\bar{r}^*+i\bar{s}^*&=\psi(t,\bar{t};\ \tau,\bar{\tau}),\end{aligned}$$

wo φ, ψ analytische Funktionen ihrer vier Veränderlichen sind, zwischen denen keine identische Abhängigkeit besteht. Setzen wir dann

$$\bar{t}=f(t),\quad \bar{\tau}=f(\tau),$$

wo f eine *reelle* analytische Funktion bedeutet, so muß nach Voraussetzung zwischen t^* und $\bar{t}^*$ eine analytische Abhängigkeit entstehen, wenn t und τ konjugiert imaginär sind, und daher muß die Funktionaldeterminante

$$(171)\qquad \frac{\partial(t^*,\bar{t}^*)}{\partial(t,\tau)}=\begin{vmatrix}\varphi_t+\varphi_{\bar{t}}f_t', & \varphi_\tau+\varphi_{\bar{\tau}}f_\tau'\\ \psi_t+\psi_{\bar{t}}f_t', & \psi_\tau+\psi_{\bar{\tau}}f_\tau'\end{vmatrix}_{\substack{\bar{t}=f(t)\\ \bar{\tau}=f(\tau)}}=0$$

sein. Da die reelle analytische Funktion f beliebig ist, folgt, daß die analytische Funktion

$$\begin{vmatrix} \varphi_t + \varphi_{\bar{t}} z, & \varphi_\tau + \varphi_{\bar{\tau}} \zeta \\ \psi_t + \psi_{\bar{t}} z, & \psi_\tau + \psi_{\bar{\tau}} \zeta \end{vmatrix}$$

in den sechs Veränderlichen $t, \bar{t}, z; \tau, \bar{\tau}, \zeta$ verschwindet, wenn die letzten drei zu den ersten drei konjugiert-imaginär sind. Daraus folgt aber durch analytische Fortsetzung, daß die Funktion überhaupt identisch verschwindet. Denn ist z. B.

$$\omega(r + is, \quad r - is) = 0$$

für reelle r, s, so folgt daraus auch das Verschwinden für komplexe r, s.

Somit folgt das Verschwinden der vier Funktionaldeterminanten

$$(172) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(t, \tau)} &= 0, \quad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(t, \bar{\tau})} = 0, \\ \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\bar{t}, \tau)} &= 0; \quad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\bar{t}, \bar{\tau})} = 0. \end{aligned}$$

Wäre nun im Gegensatz zu den Annahmen (167), (168) das Funktionenpaar φ, ψ etwa von dem Paar t, τ von Veränderlichen abhängig, so folgte aus den beiden oberen Gleichungen in (172), die linear in φ_t, ψ_t sind, und aus den beiden linken Gleichungen (172), die in φ_τ, ψ_τ linear sind, auch noch

$$(173) \qquad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\tau, \bar{\tau})} = 0, \quad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(t, \bar{t})} = 0.$$

Nach (172), (173) wären aber die Funktionen φ, ψ voneinander abhängig entgegen der Voraussetzung.

Damit ist also gezeigt: *Soll durch eine analytische Zuordnung*

$$(r, s, \bar{r}, \bar{s}) \to (r^*, s^*, \bar{r}^*, \bar{s}^*)$$

jeder analytischen Beziehung zwischen $r + is$ und $\bar{r} + is$ wieder eine solche zwischen $r^* + is^*$, $\bar{r}^* + i\bar{s}^*$ entsprechen, so muß die Zuordnung die Form (167) *oder* (168) *haben*[12]).

Zur Gültigkeit des Beweises sind ziemlich erhebliche Voraussetzungen über die Existenzbereiche der auftretenden analytischen Funktionen erforderlich.

[12]) Das hat schon *E. Study* behauptet, Sugli enti analitici, Rendiconti di Palermo **21** (1906), S. 345—359. Für seinen etwas allgemeineren Satz hat *Study* dem Verfasser kürzlich einen Beweis mitgeteilt.

§ 113. Weitere Formeln für stereographische Linienkoordinaten.

Wir wollen in (157) die reellen Bestandteile absondern und erhalten so

$$\text{(174)}\qquad \mathfrak{a}\begin{cases} \mathfrak{a}_1 = \dfrac{2r}{1+r^2+s^2}, \\ \mathfrak{a}_2 = \dfrac{2s}{1+r^2+s^2}, \\ \mathfrak{a}_3 = \dfrac{1-(r^2+s^2)}{1+r^2+s^2}; \end{cases}$$

$$\text{(175)}\qquad \bar{\mathfrak{a}} = 2\,\frac{\mathfrak{b}\,\bar{r}+\mathfrak{c}\,\bar{s}}{1+r^2+s^2}.$$

Darin bedeuten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ die Vektoren

$$\text{(176)}\qquad \mathfrak{b}\begin{cases} \dfrac{1-r^2+s^2}{1+r^2+s^2}, \\ \dfrac{-2rs}{1+r^2+s^2}, \\ \dfrac{-2r}{1+r^2+s^2}; \end{cases} \qquad \mathfrak{c}\begin{cases} \dfrac{-2rs}{1+r^2+s^2}, \\ \dfrac{1+r^2-s^2}{1+r^2+s^2}, \\ \dfrac{-2s}{1+r^2+s^2}. \end{cases}$$

Die drei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bilden ein orthogonales Dreibein von Einheitsvektoren

$$\text{(177)}\qquad \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}=\mathfrak{c},\quad \mathfrak{b}\times\mathfrak{c}=\mathfrak{a},\quad \mathfrak{c}\times\mathfrak{a}=\mathfrak{b}.$$

Aus dieser Darstellung der Vektoren $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ folgt: *Die stereographischen Linienkoordinaten haben folgende Bedeutung:* $t=r+is$ *gibt die Richtung, und zwar ist* t *Riemanns komplexe Zahl auf dem sphärischen Bilde.* $\bar{t}=\bar{r}+i\bar{s}$ *legt die Lage des Strahls im Bündel gleichsinnig paralleler Strahlen fest, und zwar ist die Gaußische Zahlenebene der* $\bar{t}$ *ähnlich abgebildet auf das Feld der Schnittpunkte der Strahlen des Parallelbündels mit einer dazu senkrechten Ebene.*

Diese Deutung unsrer Koordinaten können wir benutzen, um mit ihrer Hilfe eine einfache Abbildung aus der Gruppe (167) darzustellen, die schon *Ribaucour* betrachtet hat und die wir kurz als „*Schwenkung*“ bezeichnen wollen. Ist $\mathfrak{A}$ ein Strahl, so wird der entsprechende $\mathfrak{A}^*$ nach folgender Vorschrift gefunden: Man lege durch den Ursprung den zu $\mathfrak{A}$ gleichsinnig parallelen Strahl $\mathfrak{A}_0$ und schwenke $\mathfrak{A}$ um die Achse $\mathfrak{A}_0$ durch einen positiven rechten Winkel nach $\mathfrak{A}^*$. In stereographischen Linienkoordinaten schreibt sich diese „Schwenkung“ offenbar so

$$\text{(178)}\qquad t^*=t,\qquad \bar{t}^*=i\bar{t}$$

oder ausführlicher

$$\text{(179)}\qquad \begin{aligned} r^*&=r, & s^*&=s;\\ \bar{r}^*&=-\bar{s}, & \bar{s}^*&=+\bar{r} \end{aligned}$$

und in den Vektoren $\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ folgendermaßen

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}, \quad \bar{\mathfrak{a}}^* = \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}. \tag{180}$$

Geben wir nun eine gradlinige Fläche, d sei ihr Drall und l die Entfernung vom Fußpunkt des Lotes aus dem Ursprung auf eine Erzeugende bis zum Kehlpunkt dieser Erzeugenden. Dann ist nach (22) und (48)

$$d = \frac{\mathfrak{a}'\bar{\mathfrak{a}}'}{\mathfrak{a}'^2}, \qquad l = \frac{(\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\bar{\mathfrak{a}}')}{\mathfrak{a}'^2}. \tag{181}$$

Üben wir auf diese Fläche die Schwenkung aus, so finden wir für die transformierte Fläche

$$d^* = -l, \quad l^* = +d. \tag{182}$$

Die Formel (164) für d können wir jetzt wegen (166) auch so schreiben

$$d = -2\frac{r\bar{r} + s\bar{s}}{1 + r^2 + s^2} + \Re\, i\frac{dt}{dt}, \tag{183}$$

wenn $\Re$ den Realteil heraushebt.

Für die Schwenkung folgt daraus nach (179)

$$d^* = -l = -2\frac{r\bar{s} - s\bar{r}}{1 + r^2 + s^2} + \Re\, i\frac{dt}{dt}. \tag{184}$$

Somit ist

$$l = 2\frac{r\bar{s} - s\bar{r}}{1 + r^2 + s^2} - \Re\, i\frac{d\bar{t}}{dt}. \tag{185}$$

Hierin steckt, daß alle Systemflächen durch einen Strahl eines isotropen Strahlensystems denselben Kehlpunkt haben und, daß dies die isotropen Strahlensysteme kennzeichnet, was wir früher anders bewiesen hatten (§ 110).

§ 114. Zusammenhang mit der Theorie der Minimalflächen von *Weierstrass*.

Um jetzt wieder auf die Minimalflächen zu kommen, bemerken wir zunächst folgendes. Man kann die (reellen, eigentlichen und gerichteten) Strahlen eineindeutig auf hindurchgehende isotrope Ebenen abbilden. Dazu setzen wir die Gleichung einer durch den Strahl $\mathfrak{A}$ laufenden isotropen Ebene in der Form an

$$\begin{aligned} (\underline{\mathfrak{a}} - i\,\bar{\mathfrak{a}})\,\underline{\mathfrak{x}} &= \bar{\mathfrak{a}}^2, \\ \underline{\mathfrak{a}} &= \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}. \end{aligned} \tag{186}$$

Zunächst geht nämlich diese Ebene durch den Fußpunkt $\underline{\mathfrak{a}}$ des Lotes vom Ursprung auf $\mathfrak{A}$, dann geht sie durch $\mathfrak{a}$ wegen

$$(\underline{\mathfrak{a}} - i\,\bar{\mathfrak{a}})\,\mathfrak{a} = 0$$

und schließlich ist sie isotrop wegen

$$(\underline{\mathfrak{a}} - i\,\bar{\mathfrak{a}})^2 = 0.$$

Wir wollen nun die Ebenengleichung (186) auf unsre stereographischen Linienkoordinaten umrechnen. Wir finden aus (175) wegen (176)

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}} = 2\,\frac{\mathfrak{c}\,\bar{r} - \mathfrak{b}\,\bar{s}}{1 + r^2 + s^2}. \tag{187}$$

Daraus ist

$$\mathfrak{a} - i\,\bar{\mathfrak{a}} = 2\,\frac{\bar{r} - i\bar{s}}{1 + r^2 + s^2}(\mathfrak{c} - i\mathfrak{b}). \tag{188}$$

Ferner ist nach (175)

$$\bar{\mathfrak{a}}^2 = 4\,\frac{\bar{r}^2 + \bar{s}^2}{(1 + r^2 + s^2)^2}. \tag{189}$$

Durch Einsetzen in (186) erhalten wir schließlich für unsre isotrope Ebene durch den Strahl $\mathfrak{A}$ die Gleichung

$$-i(1 - t^2)x_1 + (1 + t^2)x_2 + 2\,i\,t\,x_3 = 2\,\bar{t}. \tag{190}$$

Unsre stereographischen Linienkoordinaten bestimmen also aufs einfachste die isotrope Ebene und vermitteln den Zusammenhang zwischen den Strahlen und isotropen Ebenen.

Aus (190) ist der Zusammenhang zwischen isotropen Strahlensystemen und isotropen Torsen klar erkennbar: Jeder analytischen Abhängigkeit der komplexen Koordinaten t, $\bar{t}$ entspricht im Linienraum ein isotropes Strahlensystem und andrerseits eine durch die Strahlen des Systems hindurchgelegte, von einem komplexen Parameter abhängige Schar isotroper Ebenen, die eine isotrope Torse umhüllen, d. i. im allgemeinen die Tangentenfläche einer isotropen Kurve.

Setzen wir

$$\bar{t} = f(t), \tag{191}$$

so geht unsre Formel (190) genau in die Formel (177) von § 20 über, die wir der integrallosen Darstellung der isotropen Kurven zugrunde gelegt hatten. Wir haben daher nach (178) § 20 für den Berührungspunkt $\mathfrak{y}$ mit der (im allgemeinen) umhüllten isotropen Kurve

$$\begin{aligned} y_1 &= i\left(\bar{t} - t\,\frac{d\bar{t}}{dt} - \frac{1 - t^2}{2}\,\frac{d^2\bar{t}}{dt^2}\right), \\ y_2 &= \left(\bar{t} - t\,\frac{d\bar{t}}{dt} + \frac{1 + t^2}{2}\,\frac{d^2\bar{t}}{dt^2}\right), \\ y_3 &= -\,i\left(\frac{d\bar{t}}{dt} - t\,\frac{d^2\bar{t}}{dt^2}\right). \end{aligned} \tag{192}$$

Nennen wir den konjugiert imaginären Punkt $\mathfrak{z}$, so ergibt sich für den Mittelpunkt $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ das Formelsystem (9) von § 91 für die Minimalfläche $\mathfrak{x}(r, s)$. Die umhüllte isotrope Kurve $\mathfrak{y}(t)$ und infolgedessen auch die Minimalfläche $\mathfrak{x}(r, s)$ schrumpft auf einen Punkt zusammen, wenn $\bar{t}$ ein in t quadratisches Polynom ist. Hingegen gibt es auch in diesem Falle ein zugehöriges isotropes Strahlensystem, das im allgemeinen aus den Erzeugenden einer konfokalen Schar von Drehhyperboloiden, im besondern aus einem Strahlenbündel besteht.

§ 115. Bemerkungen und Aufgaben.

1. **Bewegungsparameter von *Study*.** Die Drehungen um einen Punkt kann man nach *Euler* auf zwei Arten durch Parameter darstellen, erstens durch die „*Euler*schen Winkel" und zweitens in symmetrischer Form durch die homogenen Parameter von *Euler*. Überträgt man die zweite Art von Parametern mittels des Übertragungsprinzips (§ 103) auf den Linienraum, so erhält man die von *Study* eingeführten Parameter für die Bewegungen im Raume *Euklids*. Vgl. *E. Study*, Mathem. Annalen **39** (1891), S. 441—566.

2. **Parallele geradlinige Flächen.** Zu einer geradlinigen Fläche $\mathfrak{A}(t)$ konstruiere man die „Parallelfläche" $\mathfrak{A}^*(t)$, wobei

$$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}_1 \cos\Theta + \mathfrak{A}_2 \sin\Theta \tag{193}$$

und $\Theta = \vartheta + \varepsilon\vartheta$ konstant ist. Zwischen den zugehörigen Größen (§ 104) besteht die Beziehung

$$\begin{aligned} p^* &= p\cos\vartheta - q\sin\vartheta, \\ q^* &= p\sin\vartheta + q\cos\vartheta; \\ \bar{p}^* &= \bar{p}\cos\vartheta - \bar{q}\sin\vartheta - \bar{\vartheta}(+p\sin\vartheta + q\cos\vartheta), \\ \bar{q}^* &= \bar{p}\sin\vartheta + \bar{q}\cos\vartheta - \bar{\vartheta}(-p\cos\vartheta + q\sin\vartheta). \end{aligned} \tag{194}$$

Es ist das die Übertragung des Begriffs der sphärischen Parallelkurven auf den Linienraum. Man kann auch dem Begriff der sphärischen Kurven konstanter Breite ein räumliches Gegenstück gegenüberstellen und zwischen den Integralinvarianten einer derartigen zu sich selbst-parallel laufenden geradlinigen Fläche Beziehungen herleiten.

3. **Zylindroid.** Die gemeinsamen Lote zwischen einem Strahl eines Systems und allen Nachbarstrahlen des Systems bilden im allgemeinen eine geradlinige Fläche dritter Ordnung, die man als Zylindroid zu bezeichnen pflegt. Man vergleiche etwa *K. Zindler*, Liniengeometrie II, Leipzig 1906, S. 82.

4. **Ein Satz von *P. Appell* über das Zylindroid.** Fällt man von einem beliebigen Punkt auf die Erzeugenden eines Zylindroids die Lote, so ist der Ort der Fußpunkte stets eine ebene Kurve. Dadurch sind die Zylindroide unter den nicht zylindrischen geradlinigen Flächen gekennzeichnet. *P. Appell*, Bulletin soc. math. France **28** (1900), S. 261—265. Die Fragestellung *Appells* hängt aufs innigste mit einer von *G. Darboux* zusammen, nämlich nach allen stetigen Bewegungsvorgängen eines starren Körpers, wobei jeder Punkt des Körpers eine ebene Bahn beschreibt. Comptes Rendus Paris **92** (1881), S. 118.

5. **Ein Gegenstück zum Satz von *Meusnier*.** Die Krümmungsachsen (§ 105) aller Systemflächen eines Strahlensystems, die sich längs einer Erzeugenden berühren, bilden ein Zylindroid. Dabei sind natürlich die Krümmungsachsen gemeint, die zur Berührungserzeugenden ge-

hören. Auch zum Satz von *Euler* über die Krümmungen der Normalschnitte einer Fläche gibt es bei Strahlensystemen ein Gegenstück, das von den Krümmungsachsen der Systemflächen mit Richtebene handelt. Indessen ist dieser Satz etwas verwickelt.

6. **Strahlensysteme mit einer einzigen Brennfläche.** Durch das Verschwinden der Invariante k sind die Systeme mit einer einzigen Brennfläche gekennzeichnet. Es umhüllen in diesem Fall die Torsen des Strahlensystems eine Schar von Asymptotenlinien der Brennfläche. Man vgl. etwa *G. Koenigs*, Thèse 1882 oder *G. Sannia*, Math. Ann. **68** (1910), S. 414.

7. **Dichte eines Strahlensystems nach *Kummer*.** Um einen Punkt $\underline{r}$ eines Systemstrahls, senkrecht zu diesem, legen wir ein Flächenelement do. Das sphärische Bild aller durch do gehender Systemstrahlen erfülle das Flächenelement $d\omega$ der Einheitskugel. Dann nennt man nach *Kummer*

$$\frac{d\omega}{do} = \frac{1}{k + \varrho^2} \tag{195}$$

die Dichte des Strahlensystems an der Stelle $\underline{r}$. Zwischen der Dichte und der Invariante k (vgl. § 106) besteht die hingeschriebene Beziehung, wenn ϱ die Entfernung von $\underline{r}$ auf dem hindurchgehenden Systemstrahl bis zu dessen Mittelpunkt (§ 108) bedeutet. *E. Kummer*, Crelles Journal **57** (1860), S. 189—230, bes. S. 208 u. f. Es sei die Rechnung kurz angedeutet. Einen Punkt auf einem Strahl $\mathfrak{A}$ unsres Systems kann man in der Form $\underline{\mathfrak{a}} + r\mathfrak{a}$ ansetzen und findet für das von ihm beschriebene Flächenelement

$$\begin{aligned} do &= ((\underline{\mathfrak{a}} + r\mathfrak{a})_u,\ (\underline{\mathfrak{a}} + r\mathfrak{a})_v,\ \mathfrak{a})\, du\, dv \\ &= (\underline{\mathfrak{a}}_u + r\mathfrak{a}_u,\ \underline{\mathfrak{a}}_v + r\mathfrak{a}_v,\ \mathfrak{a})\, du\, dv. \end{aligned} \tag{196}$$

Durch Division mit dem entsprechenden Element $d\omega$ der Kugeloberfläche folgt nach einer Umrechnung

$$\begin{aligned} \frac{do}{d\omega} &= \frac{(\underline{\mathfrak{a}}_u\, \underline{\mathfrak{a}}_v\, \mathfrak{a})}{(\mathfrak{a}_u\, \mathfrak{a}_v\, \mathfrak{a})} + \frac{(\underline{\mathfrak{a}}_u\, \mathfrak{a}_v\, \mathfrak{a}) + (\mathfrak{a}_u\, \underline{\mathfrak{a}}_v\, \mathfrak{a})}{(\mathfrak{a}_u\, \mathfrak{a}_v\, \mathfrak{a})}\, r + r^2 \\ &= \frac{\bar{e}\,\bar{g} - (\mathfrak{a}_u\, \bar{\mathfrak{a}}_v)\,(\mathfrak{a}_v\, \bar{\mathfrak{a}}_u)}{e\,g - f^2} + \frac{(\mathfrak{a}_u\, \bar{\mathfrak{a}}_v) - (\mathfrak{a}_v\, \bar{\mathfrak{a}}_u)}{(\mathfrak{a}_u\, \mathfrak{a}_v\, \mathfrak{a})}\, r + r^2 \\ &= \frac{\bar{e}\,\bar{g} - \bar{f}^2}{e\,g - f^2} + \left\{ r + \frac{(\mathfrak{a}_u\, \bar{\mathfrak{a}}_v) - (\mathfrak{a}_v\, \bar{\mathfrak{a}}_u)}{2\,(\mathfrak{a}_u\, \mathfrak{a}_v\, \mathfrak{a})} \right\}^2 = k + \varrho^2. \end{aligned} \tag{197}$$

8. **Divergenz eines Strahlensystems.** Denken wir uns in jedem Punkt eines Strahls $(\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}})$ eines Systems den Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ abgetragen, so ist dadurch ein „Vektorfeld" erklärt. Als Divergenz eines Vektorfeldes $a_k(x_1, x_2, x_3)$ bezeichnet man den Ausdruck

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}.$$

Für die Divergenz des eben erklärten Feldes findet man den Wert

$$2\,\frac{\varrho}{k-\varrho^2}, \tag{198}$$

wo k und ϱ dieselbe Bedeutung wie in der vorhergehenden Aufgabe haben.

9. **Über die Gesamtkrümmung eines Strahlensystems.** Man dehne die Integralformel (§ 107 (101))

$$2\int h\,d\omega = \int q\,dt$$

auf geradlinige Flächen mit Kanten aus und ermittle die geometrische Bedeutung des in einem Normalensystem vom Wege unabhängigen Integrals

$$\int \bar{q}\,dt.$$

10. **Synektische Strahlensysteme.** Nach dem Vorbild einer analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen kann man die „synektischen Funktionen" einer dualen Veränderlichen erklären. Man findet

$$f(u+\varepsilon v) = f(u) + \varepsilon v f'(u). \tag{199}$$

Gibt man den dualen Einheitsvektor $\mathfrak{A}$ als derartige Funktion vor

$$\mathfrak{A}(u+\varepsilon v) = \mathfrak{A}(u) + \varepsilon v\,\mathfrak{A}'(u), \tag{200}$$

so ist dadurch ein zylindrisches Strahlensystem erklärt, das man nach *Study* wieder „synektisch" nennt. Mittels der Integrabilitätsbedingung (109) zeige man, daß diese Strahlensysteme aus den Normalen einer Torse bestehen. *E. Study*, Geometrie der Dynamen, S. 305 u. f.

11. **Über isotrope Strahlensysteme.** Man ermittle zu einer gegebenen Minimalfläche alle zugehörigen isotropen Strahlensysteme, die die Minimalfläche zur Einhüllenden der Mittelebenen haben, und gebe die einfache Konstruktion an, die von einem dieser Systeme zu irgendeinem andern führt. *A. Ribaucour*, Brüssel mém. cour. **44** (1881).

12. **Strahlensysteme von *Bianchi*.** Wenn h und k konstant sind, so haben die Brennflächen festes Krümmungsmaß. *L. Bianchi*, Annali di matematica (2) **15** (1887).

13. **Strahlensysteme von *Guichard*.** Das duale Bogenelement $d\mathfrak{A}^2$ eines Strahlensystems lasse sich auf die Form von *Tschebyscheff* bringen

$$d\mathfrak{A}^2 = du^2 + 2F\,du\,dv + dv^2. \tag{201}$$

Dann ist also $e = g = 1$, $\bar{e} = \bar{g} = 0$. Man zeige, daß die Torsen des Systems die Brennflächen in Krümmungslinien berühren. *C. Guichard*, Annales de l'École normale (3) **6** (1889), S. 333—348.

14. **Synektische Transformationen des Strahlenraumes.** In den

Linienkoordinaten $R = r + \varepsilon\bar{r}$, $S = s + \varepsilon\bar{s}$ von § 112 schreibt sich eine synektische Transformation in der Form

$$(202)\qquad \begin{aligned} R^* &= f(R, S) = f(r, s) + \varepsilon\left\{\frac{\partial f}{\partial r}\bar{r} + \frac{\partial f}{\partial s}\bar{s}\right\}, \\ S^* &= g(R, S) = g(r, s) + \varepsilon\left\{\frac{\partial g}{\partial r}\bar{r} + \frac{\partial g}{\partial s}\bar{s}\right\}, \end{aligned}$$

wo f und g synektische Funktionen im Sinne der Aufgabe 10 sind. Man zeige, daß diese Transformationen die synektischen Strahlensysteme unter sich vertauschen.

15. Dual konforme Abbildungen. Unter den synektischen Abbildungen (Aufg. 14) sind die dual-konformen enthalten, die sich in der Veränderlichen $T = t + \varepsilon\bar{t}$ so schreiben lassen

$$(203)\qquad T^* = F(T) = F(t) + \varepsilon F'(t)\cdot\bar{t},$$

wo F eine Potenzreihe mit komplexdualen Koeffizienten bedeutet. Die „Winkeltreue" dieser Abbildungen äußert sich so: Ist $d\varphi + \varepsilon d\bar{\varphi}$ der duale Winkel zweier Nachbarstrahlen, $d\varphi^* + \varepsilon d\bar{\varphi}^*$ der der entsprechenden, so ist

$$(204)\qquad d\varphi^* + \varepsilon d\bar{\varphi}^* = (a + \varepsilon b)(d\varphi + \varepsilon d\bar{\varphi}),$$

$$(205)\qquad \frac{d\bar{\varphi}^*}{d\varphi^*} = \frac{d\bar{\varphi}}{d\varphi} + a,$$

wo a, b nur vom Orte, nicht von der Richtung abhängen. Die Transformationen (203) gehören zu den Transformationen (167). *J. Grünwald*, Monatshefte f. Math. u. Phys. **17** (1906), S. 118 u. f.

16. Die dualen Kreisverwandtschaften. Eine Untergruppe der dual konformen Abbildungen entsteht, wenn wir für F eine linear-gebrochene Funktion nehmen

$$(206)\qquad T^* = \frac{AT + B}{CT + D}.$$

Dieselbe (12-gliedrige) Gruppe von Transformationen des Linienraumes kann man auch auf anderem Wege erhalten: Man unterwerfe die isotropen Ebenen den komplexen *Euklid*ischen Bewegungen, dann entspricht diesen Transformationen der isotropen Ebenen vermöge der Abbildung von § 114 auf die Strahlen im Linienraum die Gruppe (206). Man vergleiche dazu neben der eben genannten Arbeit von *J. Grünwald* noch *E. v. Weber*, Leipziger Berichte **55** (1903), S. 384—408 und *W. Blaschke*, Monatshefte f. Math. u. Phys. **21** (1910), S. 201—308.

17. Dual flächentreue Abbildungen. Eine andere Untergruppe der in Aufgabe 14 besprochenen synektischen Abbildung sind die, bei denen das duale Flächenelement der Kugel $\mathfrak{A}^2 = 1$ erhalten bleibt. Man beweise, daß diesen Transformationen Abbildungen der Strahlen entsprechen, bei denen die Normalensysteme untereinander vertauscht werden.

18. Formänderung von Minimalflächen. Man unterwerfe ein isotropes Strahlensystem einer Transformation (203) oder (206), wie ändert sich dann die zugehörige Minimalfläche?

19. Ein Satz von *R. Rothe*. Es sei $a_k(x_1, x_2, x_3)$ ein Vektorfeld. Unter seiner „Rotation" versteht man den Vektor

$$\text{(207)} \qquad rot\ \mathfrak{a} \begin{cases} \dfrac{\partial a_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial a_2}{\partial x_3}, \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial a_3}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2}. \end{cases}$$

Wenn $\mathfrak{a}^2 = 1$ ist, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Geradlinigkeit der Kraftlinien des Feldes

$$\text{(208)} \qquad \mathfrak{a} \times rot\ \mathfrak{a} = 0.$$

R. Rothe, Jahresbericht der D. Mathem. Ver. **21** (1912), S. 256. Weitere Literatur bei *H. Rothe*, Enzyklopädie III A B 11, S. 1363 u. ff.

20. Integralinvarianten der Liniengeometrie. Neben den in § 107 betrachteten beiden Doppelintegralen kann man auch Bewegungsinvarianten drei- und vierfacher Integrale betrachten. Um die einfach schreiben zu können, wollen wir unsere Linienkoordinaten $a_k, \bar{a}_k$ durch vier unabhängige Veränderliche $\varphi, \bar{\varphi}; \vartheta, \bar{\vartheta}$ ausdrücken:

$$\text{(209)} \qquad \begin{aligned} a_1 &= \cos\vartheta\cos\varphi, & a_1 &= -\cos\vartheta\sin\varphi\cdot\bar{\varphi} - \sin\vartheta\cos\varphi\cdot\bar{\vartheta}, \\ a_2 &= \cos\vartheta\sin\varphi, & a_2 &= +\cos\vartheta\cos\varphi\cdot\bar{\varphi} - \sin\vartheta\sin\varphi\cdot\bar{\vartheta}, \\ a_3 &= \sin\vartheta, & a_3 &= \quad * \quad + \cos\vartheta\cdot\bar{\vartheta}. \end{aligned}$$

Dann ist das über eine von drei Parametern abhängige Gesamtheit von Geraden erstreckte dreifache Integral

$$\text{(210)} \qquad \iint\{\sin\vartheta\cdot d\vartheta\, d\varphi \int\sqrt{\cos^2\vartheta\cdot d\bar{\varphi}^2 + d\bar{\vartheta}^2}\}$$

und ebenso das vierfache Integral

$$\text{(211)} \qquad \iint\{\sin\vartheta\cdot d\vartheta\, d\varphi \iint|\cos\vartheta|\cdot d\bar{\vartheta}\, d\bar{\varphi}\}$$

bewegungsinvariant. Erstreckt man das dreifache Integral über alle (gerichteten) Geraden, die ein Kurvenstück schneiden, so ist der Wert des Integrals gleich $\pi^2 \times$ Länge des Kurvenstücks. Erstreckt man das vierfache Integral über alle Geraden, die ein Flächenstück treffen, so ergibt sich, wenn man die Vielfachheit der Schnittpunkte berücksichtigt, als Integralwert $2\pi \times$ Oberfläche des Flächenstücks. Das vierfache Integral hat in etwas anderer Schreibweise schon *E. Cartan* betrachtet, Bulletin société mathématique France **24** (1896), S. 140—177. Man vgl. auch die Aufgaben 18 in § 21 und 14 in § 88 und die dort angegebene Literatur.

21. **Ein Satz von *G. Darboux*.** Eine Gerade $\mathfrak{A}$ sei so beweglich, daß auf ihr drei Punkte $\mathfrak{p}_k$ mit festen Abständen in drei festen paarweis senkrechten Ebenen gleiten können. Dann beschreibt $\mathfrak{A}$ das Normalensystem einer Fläche, die vom Mittelpunkt der Strecke beschrieben wird, deren eines Ende nach $\mathfrak{p}_k$ fällt, und deren andres Ende der Fußpunkt des Lotes vom Schnittpunkt der festen Ebenen auf $\mathfrak{A}$ ist. Comptes Rendus, Paris **92** (1881), S. 446.

22. **Ein Lehrsatz zur Kinematik.** Ein Strahl eines Strahlensystems heißt „isotrop", wenn dort $d_1 = d_2$ (§ 106) ist. Man zeige: Die geraden Linien eines mit zwei Freiheitsgeraden beweglichen starren Körpers, die in einem Bewegungsaugenblick von allgemeiner Art isotrope Strahlen der von ihnen durchlaufenen Strahlensysteme sind, bilden ein isotropes Strahlensystem, das aus den Erzeugenden der Paraboloide einer konfokalen Schar besteht. *W. Blaschke*, Archiv d. Mathem. u. Physik (3) **17** (1911), S. 194—195.

23. **Über geradlinige Flächen.** Führt man in § 105 an Stelle der $\bar{\mathfrak{a}}_k$ die durch (29), (33), (34) erklärten α_k ein:

$$(212) \qquad \bar{\mathfrak{a}}_1 = \alpha_3 \mathfrak{a}_2 - \alpha_2 \mathfrak{a}_3, \quad \bar{\mathfrak{a}}_2 = \alpha_1 \mathfrak{a}_3 - \alpha_3 \mathfrak{a}_1, \quad \bar{\mathfrak{a}}_3 = \alpha_2 \mathfrak{a}_1 - \alpha_1 \mathfrak{a}_2,$$

so treten an Stelle von (46) die Ableitungsgleichungen

$$(213) \qquad \alpha_1' = \bar{q} + p\,\alpha_2, \quad \alpha_2' = -p\,\alpha_1 + q\,\alpha_3, \quad \alpha_3' = \bar{p} - q\,\alpha_2.$$

Zum Schluß sei erwähnt, daß sich die hier vorgetragenen Methoden der Liniengeometrie auch dazu verwenden lassen, um die Differentialgeometrie der „Linienkomplexe" zu behandeln, d. h. der von drei wesentlichen Parametern abhängigen Mannigfaltigkeiten von geraden Linien. Indessen wurde bisher die elementare Differentialgeometrie dieser Gebilde noch wenig untersucht[13]), vielleicht da kein Anstoß dazu aus der geometrischen Optik erfolgt ist, aber die algebraische Seite ist z. B. von *E. Kummer* entwickelt worden, wobei er auf die berühmte nach ihm benannte Fläche gekommen ist, die den Gegenstand der Untersuchungen vieler Geometer gebildet hat.

Wir werden im zweiten Teil dieser Vorlesungen von anderem Standpunkt aus wieder auf die Liniengeometrie zurückkommen.

---

[13]) Vgl. etwa *G. Sannia*, Annali di matematica, (3) **17** (1910), S. 179—223.

Namen- und Stichwortverzeichnis.

Die Zahlen geben die Seiten an.

Abbildung = Punkttransformation 65.
— der Geraden auf die Kugeln nach *Lie* 85.
— der Geraden auf die dualen Punkte einer Kugel nach *Study* § 103.
— äquilonge 85.
— dual-flächentreue 222.
— dual-konforme 222.
— flächentreue 85.
— isometrische = längentreue 87.
— sphärische § 41.
— synektische 221—222.
Abhängigkeit, lineare, von Vektoren 6.
Ableitungsformeln der Flächentheorie von *Weingarten* § 46, von *Gauss* § 48.
— in der Liniengeometrie für geradlinige Flächen 195, 196, für Strahlensysteme 203, 209.
Abwickelbarkeit 88.
Abwickelkrümmung 91.
Achsenkreuz 1.
Adjungierte Minimalflächen 187.
Analytische Funktion 1.
Appell, P., 200, 219.
Archimedes 161.
Assozierte Minimalflächen 187.
Asymptoten = Wendetangenten einer Fläche 57.
Asymptotenebene einer geradlinigen Fläche 194.
Asymptotenlinien = Haupttangentenkurven = Wendelinien § 43.
— auf geradlinigen Flächen § 44.

Baltzer, R. 60.
Barbier, E. 32.
Baule, B. 119.
Bedingung *Jacobi's* § 83.
Beltrami, E. 31, § 47, 82, 83, 109, § 66, § 67, § 69, 126, 157, 188, 189.
Bernstein, F. 51.
Bernstein, S. 175.
Bertrand, J. 19, 98.
*Bertrand*kurven § 12.
Berwald, L. 32, 162.
Beschleunigungsvektor 5.
Bewegungsparameter *Study's* 219.
Bianchi, L. 51, 138, 221.
Bieberbach, L. 189.
Binormalen einer Kurve 9, 10.
— Bild 10.
— Vektor 10.
Birkhoff, G. D. 143.
Björling, E. G. § 95.
Blaschke, W. 16, 25, 29, 31, 32, 40, 49, 51, 81, 83, 84, 86, § 77, 150, 160, 173, 180, 183, 189, 213, 222, 224.
Bliss, G. A. 147.
Böschungslinien § 15.
— auf der Kugel § 16.
— auf einem Drehparaboloid § 17.
— auf einem parabolischen Zylinder 31.
— auf einer Drehfläche zweiter Ordnung 31.
— als Extremalen 38.
Bogenlänge einer Kurve § 1.
Bolza, O. 142, 148, 154.
Bolzano, B. 64.
Bolyai, J. 106.
Bonnet, O. 85, 108, 117, 123, 130, 143, § 84, 187, § 107.
Brennflächen § 108.
Brunn, H. 183.

Carathéodory, C. 32, 45, 145, 154, § 87, 160, 162.
Carleman, T. § 96, 189.
Cartan, E. 204, 223.
Catalan, E. 188.
Cauchy, A. L. 120.
Cavalieri, B. 177.
Cesàro, E. 124.
Charakteristiken 125.
Chasles, M. 194.

Christoffel, E. B. 78, § 79, 160.
Clifford, W. K. 191.
Codazzi, D. 79, 123.
Crofton, M. W. 33, 162.
Curvatura integra = Gesamtkrümmung 107.
Czuber, E. 163.

Darboux, G. 15, 31, 82, 99, 112, 117, 125, 126, 148, 161, 189, 224.
Delaunay, Ch. E. 49.
Determinanten aus drei Vektoren 5.
— Multiplikationssatz für 6.
Dichte eines Strahlensystems nach *Kummer* 220.
Differentialgleichung der Asymptotenlinien 71.
— der Krümmungslinien 60.
— von *Cauchy* und *Riemann* 120, 122.
— von *Euler* und *Lagrange* 102, 144.
— von *Jacobi* 145 (36).
— von *Laplace* 120, 136.
— von *Riccati* 73.
Differentiation von Vektoren 3.
Differentiator = Differentialparameter, erster § 66, zweiter § 67.
Diguet 98.
Dini, U. 125.
Divergenz eines Strahlensystems 220.
Drall = Verteilungsparameter einer geradlinigen Fläche 194.
Drehvektor 14.
Dreibein, begleitendes 12.
Dreizeigersymbole *Christoffel*s 78.
Dualer Winkel 193.
— Kreisverwandtschaften 222.
— Zahlen 191.
Dupin, Ch. 57, 63, 81, 82.
Durchmesser einer Eifläche § 84.

Ebene Kurven § 9, Kennzeichnung durch verschwindende Windung 11.
Eckbedingung von *Erdmann* § 82.
Eichkurve = Indikatrix der Variationsrechnung 144.
Eifläche = Ovaloid 130.
Eilinie = Oval 16, 32, 33.
Einbetten einer geodätischen Linie in ein Feld 95.
Einfach zusammenhängend 107.
Einheitsvektor 4.
Einzigkeitsbeweis = Unitätsbeweis 42, § 98.
Eisenhart, L. P. 189.
Elliptische Krümmung 56.
Engel, F. 114, 124.
Enneper, A. 32, § 47, 187.
Entfernungskreise, geodätische § 59.
Epizykloide 22.
Erdmann, G. § 82, 148.
Erste Grundform der Flächentheorie § 32.
Erste Variation der Bogenlänge § 22.
— der Krümmung einer Kurve 36.
— der Oberfläche § 89, § 93.
— von H und K § 101.
Euler, L. 52, § 34, 81, 88, 113, 122, 123, 220.
Existenzbeweise § 14, 49, § 85, § 99.
Existenzsatz für lineare Differentialgleichungen § 14.
Extremalen eines Variationsproblems 102.
Evoluten § 18.
Evolventen § 18.

Fadenevolventen 26.
Feld geodätischer Linien 94.
Finsterwalder, S. 125.
Flächenelement 68.
Flächen mit festem K §§ 60—62, § 80.
— mit geschlossenen Krümmungskreisen § 70.
— von *Liouville* 124.
— mit fester Entfernung der konjugierten Punkte § 86.
— die der Kugel unter Orthogonalität zugeordneter Linienelemente entsprechen 210.
— mit $H = 0$ (Minimalflächen) §§ 91 bis 95.
Flächentreue Abbildung 85.
Formeln von *Frenet* § 6, ihre kinematische Deutung nach *Darboux* § 8.
— von *Frenet* in der Ebene 15.
— von *Gauss* und *Bonnet* über die Gesamtkrümmung 108, § 64.
— von *Gauss* für die Fläche des geodätischen Dreiecks 109.
— von *Green* § 68.
— allgemeine, für die geodätische Krümmung § 69.
— von *Hamilton* und *Mannheim* für Strahlensysteme § 109.
Forsyth, A. R. 31.
*Fourier*reihen 43.
Frenet, F. 11.
Frobenius, G. § 26, 79.
Funk, P. 162.

Gauß, K. F. 52, § 36, § 41, § 48, § 49, 80, 85, 87, 88, 95, § 58, 103, 106 bis 109, 113, 122, § 73, 122, 124, 125, § 93.
Geiser, C. F. 188.
Geodätische Kreise 95, 98, § 59.
— geschlossene § 81, 161, 162.
Geodätische Krümmung § 53 u. 54.
Geodätische Linien § 56.
Geodätische Polarkoordinaten § 57.
Geodätisch-parallel 95.
Geographische Länge 54.
Geradlinige Fläche = Regelfläche 61, § 104 u. 105.
Gesamtkrümmung = curvatura integra 107.
— eines Strahlensystems § 107, 221.
Geschlecht 111.
Geschwindigkeitsvektor 3.
Gleichgewicht einer gravitierenden Flüssigkeit 189.
Gleichungen, natürliche § 13.
Goursat, E. 86.
Gravé, D. A. 85.
Green, G. § 68.
*Green*sche Funktion 160.
Groß, W. § 99.
Grenzpunkt 207.
Grünwald, J. § 112, 213, 222.
Guichard, C. 221.

Hadamard, J. 160, 162.
Halphen, G. H. 31.
Hamilton, W. R. 190, § 109.
Hauptflächen eines Strahlensystems 203.
Hauptkrümmungen einer Fläche 57, § 35.
Hauptnormalen einer Kurve 9, 10.
— Vektor 10.
Hauptrichtungen auf einer Fläche 60.
Haupttangentenkurven = Asymptotenlinien einer Fläche § 43.
Hazzidakis, N. 139.
Heine, E. 136.
Herglotz, G. 16, 142.
Hilbert, D. 127, § 80, 154, 157, 189.
Hölder, O. 179.
Holmgreen, E. § 80.
Hostinský, B. 81.
Hüllkurvensatz = Enveloppensatz 111.
Hurwitz, A. § 27, 136.
Huyghens, Ch. 71.
Hyperbelfunktionen 128.
Hyperbolische Krümmung 56.

Identität von *Lagrange* 6.
Indikatrix von *Dupin* 57.
— in der Variationsrechnung 144.
Inneres Produkt von Vektoren = skalares Produkt 4.
Inneres Quadrat = inneres Produkt eines Vektors mit sich selbst 19.
Integral der geodätischen Krümmung § 63.
Integralformel von *Gauß* und *Bonnet* 108, § 64; ihre Übertragung auf Strahlensysteme § 107.
Integralinvarianten geradliniger Flächen 197, 198.
— weitere, der Liniengeometrie § 107, 223.
Integrallose Darstellung der isotropen Kurven § 20.
Inversion = Spiegelung an einer Kugel = Transformation durch reziproke Radien 65.
Involutorisch 65.
Isoperimetrie des Kreises §§ 25—27.
— der Kugel § 97 und 98.
— des Kreises auf der Kugel 51.
— des Kreises im Raum § 96.
Isotherme Parameter auf einer Fläche § 71.
Isotrope Kurven = Minimalkurven § 19. § 20, §§ 90—92.
Isotrope Strahlensysteme §§ 110—112.

Jacobi, C. G. J., 32, 80, 95, 112, 123. § 83.
Jellet, J. H. 127.

Kanalflächen 84.
Kanonische Darstellung einer Kurve 12.
— — einer Fläche 83.
— Koordinaten 96.
Kegelschnitte, geodätische 125.
Kehllinie einer geradlinigen Fläche 194.
Kehlpunkt = Hauptpunkt einer geradlinigen Fläche 194.
Kettenfläche = Catenoid 188.
Kettenlinie 39.
Klein, F. 190.
Kneser, A. 16.
Koenigs, G. 190, 220.
Konfokale Flächen zweiter Ordnung 64.
Konforme = winkeltreue Abbildung im Raum § 40.

Konforme Abbildung auf einer Fläche § 72.
Konjugierte Flächenrichtungen 71.
— Netze auf einer Fläche § 45.
— Punkte (im Sinn der Variationsrechnung) 145, § 86.
Konvergenzbeweis von *W. Groß* § 99.
Kreisevolvente 25.
Krümmung = Flexion einer Kurve § 5, 13.
— der Asymptotenlinien 83.
— geodätische § 53.
— mittlere, einer Fläche 58.
Krümmungsachse einer Kurve 17, 56.
— einer geradlinigen Fläche 200.
Krümmungshalbmesser einer Kurve 17.
Krümmungskreis, geodätischer 118.
Krümmungslinien § 37.
Krümmungsmaß von *Gauß* 58, § 36, 68.
— Deutung des 83, 123.
Krümmungsmittelpunkt einer Kurve § 10.
Kugel, Unverbiegbarkeit der § 75.
— die, als einzige Eifläche fester mittlerer Krümmung § 76; Umkehrung eines Satzes von *Archimedes* über die Kugel 161.
Kugelfunktionen = Kugelflächenfunktionen 136.
Kummer, E. 190, 220, 224.
Kurven 1.
— ebene 15.
— fester Krümmung 18.
— von *Bertrand* § 12.
— isotrope §§ 19 u. 20.
— von *Study* 32.
— mit fester Windung 33, 51.
— konstanter Breite 32, 219.
Kurvennetze von *Tschebyscheff* 138.
— konjugierte § 45.
— isotherme § 71.

Längentreue = isometrische Abbildung 87.
Lagrange, J. L. 6, 113, 122, 165.
Laguerre, E. 86.
Lambert, J. H. 122.
Lamé, G. 115.
Lasswitz, K. 106.
Lebesgue, H. 43, 88, 154.
Legendre, A. M. 125.
Liapunoff, A. 189.
Lichtenstein, L. 121, 185.
Lie, S. 74, 85, 99, 166, 188.
Liebmann, H. 42, 83, 127, 130, 131.
Lineare Abhängigkeit von Vektoren 6.
Linearkombination von Vektoren 3.
Linienelement = Bogenelement 94.
Liniengeometrie §§ 103—115.
Linienkoordinaten, spezielle, von *Plücker* 85.
— allgemeine, von *Plücker* 191.
— stereographische § 112 u. § 113.
Liouville, J. 66, 67, 89, 124, 125.
Lobatschefskij, N. I. 106.

Mainardi, G. 79, 123.
Mannheim, A. 207.
Mercator, G. 122.
Meridian einer Drehfläche 54.
Meusnier, M. Ch. § 34, 81, 219.
Minding, F. 89, 123, 127, 139, 150.
Minimalflächen §§ 90—92, § 94, § 95, 187, 188.
— von *Enneper* 187.
— von *Geiser* 188.
— von *Lie* 188.
— Beziehungen der, zu den isotropen Strahlensystemen § 111.
— Formänderung der 223.
Minimalprojektion 31.
Minkowski, H. 82, 83, 127, § 78, 180.
Mises, R. v. 49.
Mittelwertsatz von *Schwarz* und *Stieltjes* § 4.
— von *Hölder* 179.
Mohrmann, H. 16.
Monge, G. 52, § 50, 88, 123, 166.
Müller, E. 23, 81.
Multiplikationssatz für Determinanten 6.
Multiplikatorregel von *Euler* und *Lagrange* zur Ermittlung bedingter Extreme 113.

Nabelpunkte einer Fläche § 38.
Nabla 113.
Natürliche Gleichungen einer Kurve § 13.
Natürlicher Parameter einer isotropen Kurve nach *Vessiot* und *Study* 28, 30.
Noether, E. 174.
Normalensysteme § 42, 84, 204, 205.
Normalriß = orthogonale Projektion 12.

Oberfläche 68.
— einer Minimalfläche § 94.
Olinde-Rodrigues 61.
Orthogonalitätseigenschaft der Kugelfunktionen 137.

Orthogonalsystem 63.
Ostrowski, A. 214, 215.
Oval = Eilinie 16.

Painvin, L. 84.
Parabolische Krümmung 56.
Parallel = Parallelkreis 54.
Parallele geradlinige Flächen 219.
Parallelflächen 82, 130.
Perron, O. 180.
Picard, E. 189.
Plateau, J. 165.
Plücker, J. 190.
Polarenbildung 72.
Polarkoordinaten 54, 63.
— geodätische § 57.
Poldistanz 54.
Poincaré, H. § 61, 106, 112. § 81.
Poncelet, J. V. 81.
Problem von *Plateau* 165.
— von *Björling* § 95.
Puiseux, V. 98.
Punkttransformation = Abbildung 65.
— winkeltreue = konforme § 40.

Quadratische Differentialformen der Flächentheorie §§ 32, 33.
— bei Strahlensystemen § 106.

Radon, J. § 23, § 24, § 55, § 86.
Rechenregeln für Vektorprodukte 6.
Rektifizierende Ebene 32.
Ribaucour, A. 189, 207, 221.
Riccati, S. 73.
Riemann, B. 96, 101, 120, 123, 172.
Rotation eines Vektorfeldes = curl 223.
Rothe, H. 223.
Rothe, R. 223.

Sannia, G. 201, 220, 224.
Satz von
Appell über Böschungslinien 200.
— übers Zylindroid 219.
Archimedes (Umkehrung) über die Kugel 161.
Beltrami über Krümmungslinien 82.
— über Drehflächen 82.
— über die Windung der Asymptotenlinien § 47.
— über Minimalflächen 188.
Carathéodory über Hüllkurven § 87.
Carleman über den Kreis § 96.
Christoffel über geschlossene Flächen § 79.
Darboux Umkehrung des Satzes von *Dupin* über Orthogonalsysteme 82.
Darboux über die Bewegung einer Punktreihe 224.
Desargues 158.
Dupin über Orthogonalsysteme § 39.
Enneper über die Windung der Asymptotenlinien § 47.
Euler über die Krümmung der Normalschnitte § 34; Gegenstück dazu 81.
Liebmann über die Kugel § 75, § 76
— über die Starrheit der Eiflächen § 77.
Liouville über die winkeltreuen Abbildungen des Raumes 66.
Malus-Dupin über die Brechung normaler Strahlensysteme 70.
Meusnier über die Krümmung der Kurven auf einer Fläche § 34; Gegenstücke dazu 81, 219, 220.
Rothe über Kurvensysteme 223.
Steiner zum Problem von *Plateau* 188.
Study über Normalensysteme 84.
Sturm über lineare Differentialgleichungen 149, 150.
Terquem über Krümmungslinien 81.
Voss über Kanalflächen 84.
Weyl über die Starrheit der Eiflächen 134.
— zur Kinematik 224.

Schattengrenzen, geodätische 126.
Scheffers, G. 85, 86, 101.
Scheitel einer Kurve 16, 32.
Schiebflächen = Translationsflächen 74, 86, § 90.
Schlicht 151.
Schmidt, E. 185.
Schmiegebene § 3, 7, 33.
Schmiegkugel § 11.
Schraubenlinie 3.
Schrittweise Näherungen = sukzessive Approximationen 23.
Schur, A. 51.
Schwarz, H. A. 7, 8, §§ 28—30, 50, 51, § 55, 148, § 94, § 95, 180, 184, 185, 189.
Schwenkung in der Liniengeometrie 216.
Skalares Produkt von Vektoren 4.
Sphärische Abbildung nach *Gauß* § 41.
Spiegelung an einer Kugel = Inversion 65.
Stäckel, P. 60, 123.
Starrheit der Eiflächen § 77.

Steiner, J. 82, 83, § 97, § 98, 187, 188.
Stereographische Linienkoordinaten § 112, § 113.
Stereographische Projektion 122, 167.
Stieltjes, T. J. 7, 8, 49.
Strahlensysteme §§ 106—115.
— isotrope §§ 110—112.
— synektische 221.
— zylindrische 201.
— von *Guichard* 221.
— von *Bianchi* 221.
Streckbare = rektifizierbare Kurven 42.
Streifen 174.
Striktionslinie = Kehllinie einer geradlinigen Fläche 194.
Study, E. 28, 32, 33, 79, 84, 85, 86, § 92, 175, 188, 189, 190, § 103, 215, 219, 221.
Sturm, J. C. F. § 84, 156.
Stützfunktion 83, § 78.
Symmetrisierung nach *Steiner* 177, §§ 97—99.

Tangente einer Kurve § 2.
Tangentenbild einer Kurve 9, 10.
Tangentenebene einer Fläche 53.
Terquem, O. 81.
Theorema egregium von *Gauß* §§ 36, 58.
Thomsen, G. 162.
Torse = abwickelbare Fläche 61, 73, 75, 88.
Torsion = Windung einer Kurve §§ 5, 7.
Transformationen der isotropen Strahlensysteme 214.
— dual-konforme 222.
— synektische 221, 222.
Tschebyscheff, P. L. 138.

Übertragungsprinzip *Study*s 192.
Ungleichheit von *Cauchy* 45.
— von *Schwarz* für Kurven mit fester Krümmung § 29, § 30, § 55.

Vallée-Poussin, Ch. J. de la 44.
Variation, erste der Bogenlänge § 22.
— der Krümmung einer Kurve 36.
Variation der Kurven fester Windung 51.
— erste, der Oberfläche § 89, § 93.
— zweite, der Oberfläche § 100.
— von H und K § 101.
Vektor 3.
Vektorielles Moment 191.
Vektorprodukt = äußeres Produkt 5.
Verbiegung § 52.
— geradliniger Flächen 198.
Verteilungsparameter = Drall einer geradlinigen Fläche 194.
Vessiot, E. 28.
Vierscheitelsatz § 9.
— Literatur zum 16.
Vierspitzensatz *Carathéodory*s § 87.
Vollständigkeitsbeziehung des Orthogonalsystems von *Fourier*=Formel *Parseval*s 43.
Vorhandensein kürzester Wege § 85.
Voss, A. 84, 189.

Weber, E. v. 222.
Weierstraß, K. 45, 94, 145, 148, § 91, 180.
Weingarten, J. § 46, 160.
Wendelfläche 188.
Weyl, H. § 77, 134.
Windung = Torsion § 5.
— Vorzeichen der § 7.
Windschiefe Flächen 73, 194.
Winkeltreue = konforme Abbildungen im Raum § 40.
— auf einer Fläche § 72.

Zahlenkugel *Riemann*s 168.
Zindler, K. 190, 201, 219.
Zoll, O. 162.
Zweite Variation der Oberfläche § 100.
— — der Bogenlänge einer Flächenkurve 146.
Zylindrische Strahlensysteme 201.
Zylindroid 219.

Berichtigung.

Auf Seite 142 Zeile 7—5 von unten soll es heißen: Zunächst gibt es das Paar $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{q}$ mit weitester und dann das Paar mit geringster Entfernung vom Punkt $\mathfrak{o}$.

Date Due

11/28/91			

Library Bureau Cat. no. 1137

QA641 .B6 1
3 5002 00230 0270
Blaschke, Wilhelm
Vorlesungen über Differentialgeometrie

QA
641
B6 (1)

AUTHOR
Blaschke. 192058
TITLE
Elementare differential-geometrie.

DATE DUE | BORROWER'S NAME

Math.

QA
641
B6
1

192058